5 Dvojpoměr

DEFINICE 19. *Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body přímky. Číslo* $\delta = \frac{(ABC)}{(ABD)}$ *nazýváme* **dvojpoměrem** *bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) a značíme $\delta = (ABCD)$.*

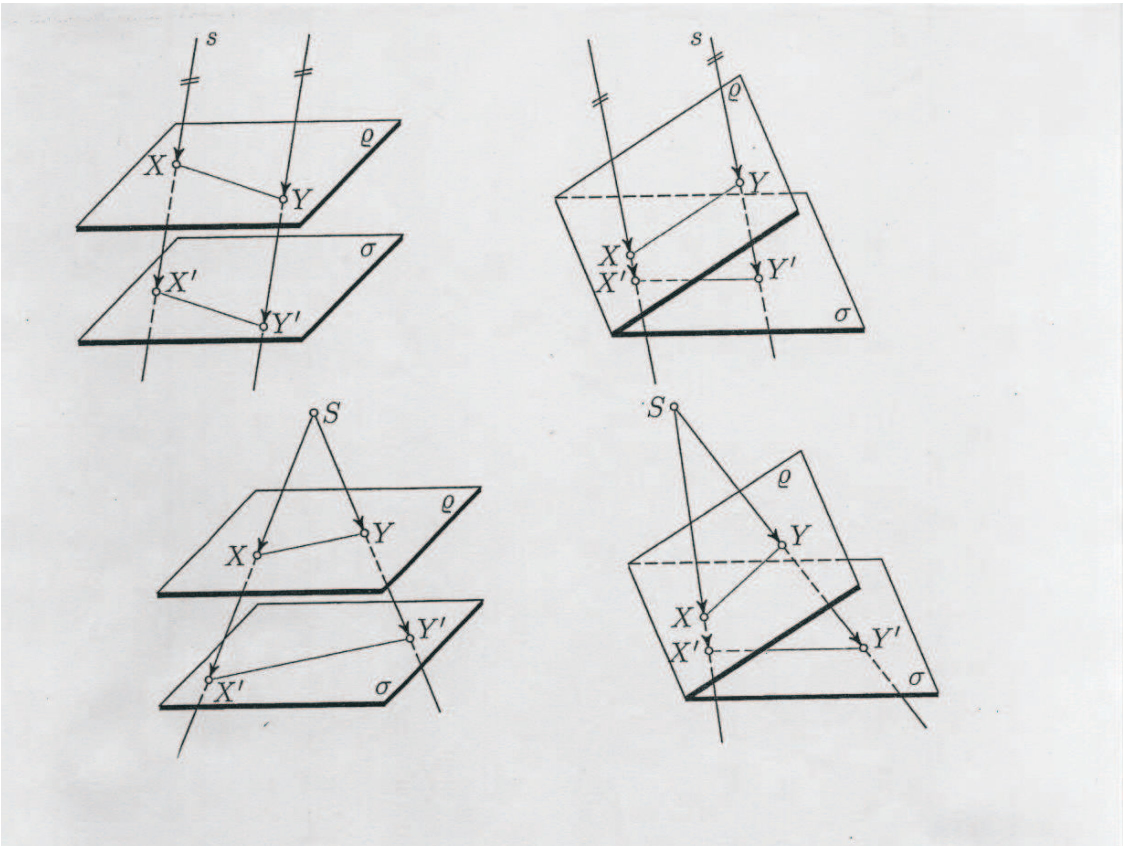
Poznámka. Zápisem (ABC), resp. (ABD), rozumíme dělící poměr bodu C, resp. D, vzhledem k bodům A, B.

Co se zachovává (tj. je invariantní) v jednotlivých typech zobrazení:

vzdálenost - metrický (euklidovský) invariant,

dělící poměr - afinní invariant,

dvojpoměr - projektivní invariant.



Obrázek 4: Promítání mezi dvěma rovinami (*Kuřina, F.: 10 geom. transformací*)

PŘÍKLAD 5.1. *Na přímce p jsou dány body A, B. Sestrojte na přímce p bod C tak, aby dělicí poměr $(ABC) = \lambda$ byl roven danému číslu.*
a) $\lambda = 3$,
b) $\lambda = \frac{1}{2}$,
c) $\lambda = -2$.

Problém: Pokuste se určit hodnoty (ABC_∞), $(AB_\infty C)$, $(A_\infty BC)$.

Věta 50. *Dvojpoměr čtyř bodů se nezmění, vyměníme-li vzájemně dva z nich a zároveň ještě oba zbývající, t.j. platí $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$.*

Věta 51. *Vyměníme-li poslední dva body mezi sebou, změní se hodnota dvojpoměru v hodnotu převrácenou, t.j. platí* $(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}$.

DEFINICE 20. *Je-li* $(ABCD) = -1$, *říkáme, že body* A, B, C, D *tvoří* **harmonickou čtveřici bodů**, *nebo že body* C, D *jsou* **harmonicky sdruženy** *vzhledem k bodům* A, B, *nebo že body* C, D **oddělují harmonicky body** A, B.

Problém: Jsou-li na přímce dány body A, B, C, sestrojte bod D tak, aby A, B, C, D tvořili harmonickou čtveřici.

PŘÍKLAD 5.2. *V* P_2 *jsou dány body* $A = (1, 2, 3), B = (3, 2, 1), C = (1, 1, 1)$. *Dokažte, že leží na přímce a vypočtěte bod* D *tak aby* $(ABCD) = -1$.

PŘÍKLAD 5.3. *Střed úsečky* AB *je harmonicky sdružen s nevlastním bodem přímky, určené body* A, B, *vzhledem k bodům* A, B. *Dokažte.*