

3 Kruhá inverze

DEFINICE 17. Kruhá inverze určená kružnicí $\omega(S, r)$ je zobrazení, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' tímto způsobem:

1. $X' \in \text{přímka } SX$,
2. $|SX| \cdot |SX'| = r^2$.

Věta 42. Vnitřní body určující kružnice se zobrazí na vnější body této kružnice a naopak, vnější body se zobrazí na vnitřní.

Věta 43. Jestliže jsou A', B' obrazy bodů A, B v kruhové inverzi, jejíž střed S neleží na přímce AB , potom

$$|\angle SAB| = |\angle SB'A'|.$$

Věta 44. Body přímky procházející středem inverze S se zobrazují opět na tuto přímku. S výjimkou středu S .

Věta 45. Obrazem přímky p , která neprochází středem inverze S , je kružnice p' procházející středem S . Kromě bodu S .

Věta 46. Obrazem kružnice procházející středem inverze S (kromě bodu S) je přímka, která neprochází středem inverze S .

Věta 47. Obrazem kružnice, která neprochází středem inverze S je kružnice.

Věta 48. Nutnou a postačující podmínkou, aby kružnice k se středem O , různá od určující kružnice ω , byla v kruhové inverzi samodružná je, aby **ortogonálně** protínala určující kružnici inverze ω .

Věta 49. Nechtě jsou a, b dvě kružnice nebo přímka a kružnice, které se dotýkají.

a) Jestliže se dotýkají v bodě $T \neq S$, kde S je střed inverze, potom se dotýkají i jejich obrazy v bodě T' , který je obrazem bodu T .

b) Jestliže se dotýkají ve středu inverze S , potom jsou jejich obrazy přímky $a' \parallel b'$.

3.1 Analytické vyjádření kruhové inverze

Pro obraz X' bodu X v kruhové inverzi se středem S a koeficientem κ platí:

$$X' = S + \frac{\kappa}{|SX|^2} \cdot (X - S)$$

3.2 Úlohy

1. V jaký útvar převede kruhá inverze kružnici a její dvě tečny, které jsou
 - a) různoběžné, b) rovnoběžné?
2. Prozkoumejte obrazy těchto dvou útvarů v kruhové inverzi:
 - a) dvě na sebe kolmé přímky, b) kružnice a přímka, která prochází jejím středem.
3. Je dána přímka p , která protíná danou kružnici k v bodech K, L a je dán bod B , ležící mimo přímku p i kružnici k . Bodem B veďte kružnici, která se dotýká p i k .
4. Sestrojte kružnici procházející danými body A, B a dotýkající se dané kružnice k ; body A, B jsou vnější body kružnice k .
5. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 , které se navzájem protínají a všechny procházejí bodem O . Sestrojte kružnici k , která se dotýká kružnic k_1, k_2, k_3 .

6. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 , z nichž se každé dvě zvenku dotýkají. Sestrojte kružnici k , dotýkající se daných kružnic.
7. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k_1, k_2 a přímka p . Sestrojte kružnici, která se dotýká kružnic k_1, k_2 a přímky p .
8. Jsou dány dvě přímky p_1, p_2 a kružnice k , která se dotýká přímky p_1 . Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek p_1, p_2 a kružnice k .
9. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k_1, k_2 a přímka p . Sestrojte kružnici se středem na přímce p , která se dotýká kružnic k_1, k_2 .
10. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 , z nichž k_1 a k_2 se protínají v bodech A, B ; k_3 leží vně k_1 i k_2 . Sestrojte kružnici k , která se dotýká kružnic k_1, k_2, k_3 .
11. V rovině je dán trojúhelník ABC . Najděte střed kruhové inverze zobrazující bod A na bod B , je-li bod C samodružný.
12. Určete střed kruhové inverze s koeficientem 2, při které se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[2, 0]$.
13. Existuje kruhová inverze, při níž jsou body $[-1, 0], [1, 0]$ samodružné a bod $[0, 0]$ se zobrazí na bod $[0, 1]$? Při kladné odpovědi určete střed této inverze, koeficient a analytické vyjádření.
14. Při kterých kruhových inverzích se zobrazí bod $[0, 1]$ na bod $[0, 9]$ a bod $[2, 0]$ do vlastního bodu na ose x ? Určete vždy střed a koeficient inverze.
15. V omezené nákresně je dána přímka t a na ní přístupný bod T . Dále je dán nepřístupný bod $M = p \cap q$; p, q jsou přímky. Sestrojte kružnici k , která prochází bodem M a přímky t se dotýká v bodě T .
16. V omezené nákresně sestrojte střed S kružnice k procházející nepřístupnými body $A = x \cap y, B = u \cap v$ a přístupným bodem C (x, y, u, v jsou dané přístupné přímky).