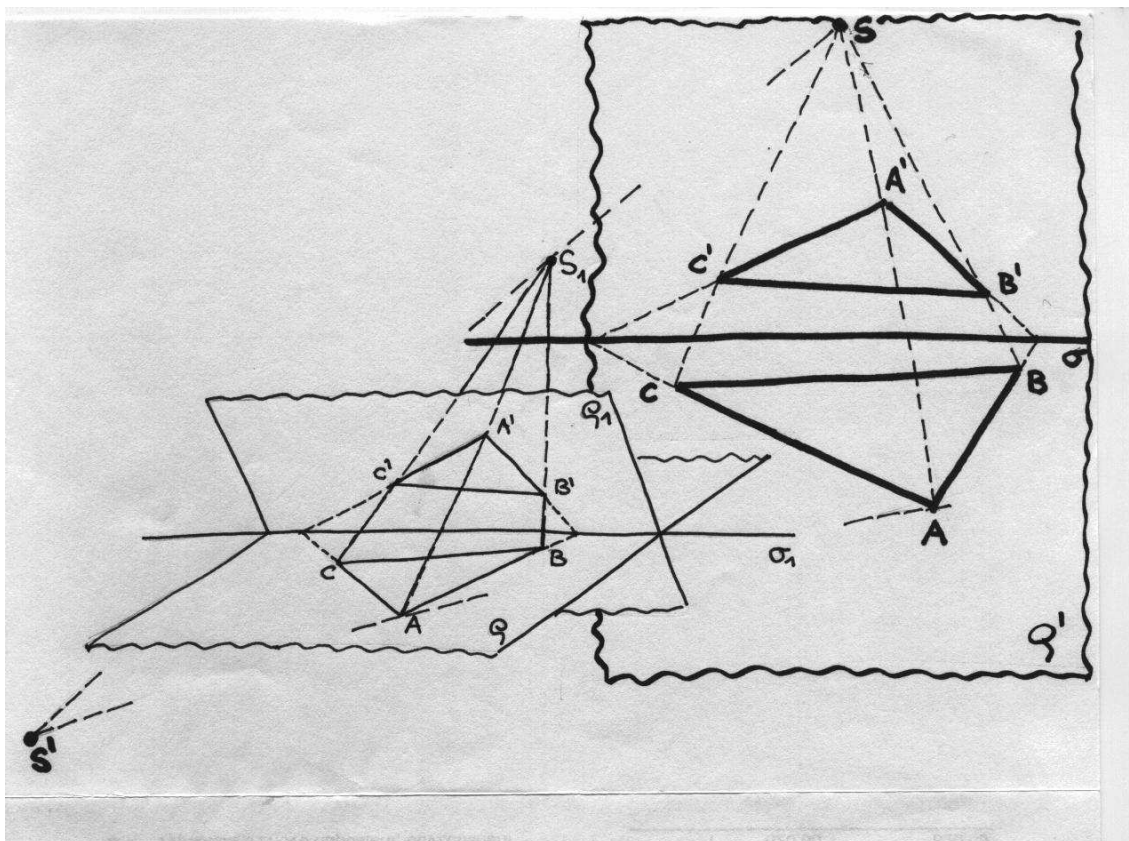


## 8 Středová kolineace



Obrázek 2: Vznik středové kolineace

**Definice 8.1** *Středovou kolineací (též perspektivní kolineací, osovou kolineací či homologií) rozumíme vzájemně jednoznačné zobrazení roviny  $\bar{E}_2$  těchto vlastností:*

1. *Spojnice odpovídajících si bodů procházejí pevným bodem - středem kolineace.*
2. *Průsečík odpovídajících si přímek leží na pevné přímce - ose kolineace.*
3. *Incidence se zachovává.*

**Poznámka 18** *Tři kolineární body (tj. tři body na přímce) přejdou tímto zobrazením opět v body kolineární - proto KOLINEACE.*

**Poznámka 19** Středová kolineace je určena:

- osou  $o$  (samodružná přímka)
- středem  $S$  (samodružný bod)
- dvojicí odpovídajících si bodů  $A, A'$ ;  $S \in AA'$  nebo přímek  $p, p'$ ;  $S \notin p, p'$ .

**Příklad 31** *Ve středové kolineaci určené osou  $o$ , středem  $S$  a dvojicí bodů  $A, A'$  sestrojte:*

- a) *obraz bodu  $X$ ,*
- b) *obraz přímky  $p$ .*

**Příklad 32** *Ve středové kolineaci určené středem, osou a jedním párem odpovídajících si přímek sestrojte:*

- a) *obraz bodu  $B$ ,*
- b) *obraz přímky  $m$ .*

**Věta 54** *Střed a každý bod osy kolineace jsou jejími samodružnými body. Osa kolineace a každá přímka procházející jejím středem jsou samodružné přímky.*

**Věta 55** *Kolineace je určena, je-li dán její střed, osa a jeden pár odpovídajících si bodů nebo přímek, jež nejsou incidentní ani se středem, ani s osou kolineace.*

### Charakteristika kolineace

$$(SA_1AA') = (SB_1BB') = \lambda$$

**Příklad 33** *Středová kolineace je určena středem, osou a dvojicí sobě odpovídajících bodů. Sestrojte obraz nevlastního bodu  $U_\infty$  přímky  $p$ .*

### Úběžník a úběžnice

Úběžník je bod, který je v dané kolineaci obrazem nevlastního bodu.

Úběžnice je přímka, která je obrazem nevlastní přímky.

**Příklad 34** *Úběžnice je rovnoběžná s osou kolineace. Dokažte.*

**Příklad 35** *Sestrojte úběžnici v kolineaci dané středem, osou a*

*a) párem odpovídajících si bodů,*

*b) párem odpovídajících si přímek.*

**Příklad 36** *Ve středové kolineaci najděte alespoň jeden bod  $V$ , jehož obrazem je nevlastní bod.*

**Věta 56** *V kolineaci existují dvě úběžnice (1. a 2. úběžnice nebo úběžnice a protiúběžnice). Vzdálenost středu kolineace od jedné z nich je rovna vzdálenosti osy kolineace od druhé z nich; přitom buď obě tyto úběžnice leží mezi středem a osou kolineace, nebo střed a osa kolineace leží mezi těmito úběžnicemi.*

**Věta 57** *Kolineace je určena středem, osou a jednou úběžnicí.*

**Příklad 37** *Ve středové kolineaci určené středem  $S$ , osou  $o$  a úběžnicí  $u$  sestrojte obraz bodu  $A$ .*

**Věta 58** *Dvojpoměr se kolineací zachovává.*

**Příklad 38** *Střed úsečky se kolineací většinou nezachovává. Ukažte.*

**Příklad 39** *Středová kolineace je dána středem  $S$ , osou  $o$  a dvojicí bodů  $B$ ,  $B_\infty$ . Najděte obraz bodu  $A$ .*

## 8.1 Kolineace kružnice a kuželosečky

Kuželosečce odpovídá v kolineaci zase kuželosečka.

**Problém:** Obrazem kružnice v dané kolineaci může být elipsa, parabola nebo hyperbola. Na čem to závisí?

**Příklad 40** Sestrojte elipsu, která odpovídá kružnici  $k$  v kolineaci dané osou, středem a úběžnicí.

**Při konstrukci obrazu kuželosečky v kolineaci využíváme následující vlastnosti:**

1. Tečna kuželosečky  $k$  přejde kolineací v tečnu kuželosečky  $k'$ .
2. Dvojpoměr se kolineací zachovává.
3. Přímkám rovnoběžným s osou kolineace odpovídají přímky téhož směru.
4. Kuželosečky  $k, k'$  odpovídající si v kolineaci mají společné průsečíky s osou kolineace a společné tečny vedené k nim ze středu kolineace.
5. Polární vlastnosti kuželoseček:
  - Je-li přímka  $p$  polárou bodu  $P$  vzhledem ke kuželosečce  $k$ , pak body dotyku  $T_1, T_2$  tečen kuželosečky  $k$  z bodu  $P$  jsou průsečíky  $p$  s  $k$ .
  - Bod  $P$  indukuje na kuželosečce involuci.
  - Dva body, z nichž každý leží na poláře toho druhého vzhledem k téže kuželosečce, se nazývají sdružené póly.
6. Průměr kuželosečky
  - každá vlastní přímka, jejíž pól je bod nevlastní
  - spojnice bodu dotyku dvou rovnoběžných tečen kuželosečky (kromě paraboly)
  - spojnice průsečíku dvou tečen kuželosečky se středem úsečky určené body dotyku těchto tečen s kuželosečkou
  - spojnice středu dvou rovnoběžných tětiv
  - každá přímka procházející středem kuželosečky (středové)
7. Střed kuželosečky
  - Pro středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) je to pól nevlastní přímky. Pól nevlastní přímky vzhledem k parabole je bod dotyku nevlastní přímky s parabolou.

**Příklad 41** Sestrojte parabolu, která odpovídá kružnici  $k$  v dané kolineaci.

**Příklad 42** Sestrojte hyperbolu, která odpovídá kružnici  $k$  v dané kolineaci.

**Příklad 43** Sestrojte kuželosečku, znáte-li tři její body a dvě tečny.

**Příklad 44** Středová kolineace v  $\overline{E}_2$  je dána osou  $o: y = 0$ , středem  $S = \langle 1, 0, a \rangle$  a dvojicí bodů  $B = \langle 1, 0, b \rangle$ ,  $B'_\infty = \langle 0, 0, b' \rangle$ . Volte hodnoty parametrů  $a, b, r$  tak, aby obrazem kružnice  $x^2 + y^2 = r^2$  byla postupně **parabola, hyperbola a elipsa**. Sestrojte.