6 Pappova věta a její důsledky

Věta 52 (Pappova věta). *Jestliže jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p na přímku $p' \neq p$, potom $(A'B'C'D') = (ABCD)$.*

Poznámka. Jiná formulace Pappovy věty: „Dvojpoměr se promítáním nemění.“

Poznámka. Věta platí i v případě, že je jeden z uvažovaných bodů nevlastní (Dokažte pro D_∞).

Problém: Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C. Sestrojte bod D tak, aby $(ABCD) = \mu$, kde μ je dané číslo.

Dvojpoměr čtyř přímek:

$$(abcd) = (ABCD).$$

PŘÍKLAD 6.1. *Jsou-li a, b dvě různoběžné přímky a x, y osy souměrnosti úhlů, které přímky a, b svírají, pak $(abxy) = -1$.*

Dvojpoměr čtyř nevlastních bodů:

$$(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty) = (abcd).$$

Dvojpoměr čtyř rovin:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Poznámka. Místo čtveřice bodů na přímce můžeme klidně uvažovat čtveřici přímek procházející jedním bodem.

6.1 Princip duality v projektivní rovině

Z každé věty v rovinné projektivní geometrii dostaneme novou správnou větu, když v ní slovo <u>bod</u> nahradíme slovem <u>přímka</u> a slovo <u>přímka</u> nahradíme slovem <u>bod</u>, přičemž incidenci zachováme. Tak vzniká dvojice <u>navzájem duálních</u> vět.

Ukázka dvojice navzájem duálních vět:

Věta 1: Dvěma různými body prochází jediná přímka.
Věta 2: Dvě různé přímky se protínají v jediném bodě.

Poznámka. Dualizovat nelze vzdálenost a úhel.

6.1.1 Princip duality v praxi

<u>Definice:</u> Skupina čtyř bodů A, B, C, D v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, se nazývá **úplný čtyřroh** $A,\ B,\ C,\ D$. Body A, B, C, D se nazývají jeho **vrcholy**. Šest přímek, z nichž každá je incidentní se dvěma z těchto vrcholů, nazýváme **stranami** úplného čtyřrohu A, B, C, D. Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech P, Q, R, jimž říkáme **diagonální vrcholy** úplného čtyřrohu; trojúhelník jimi určený se nazývá **diagonální trojúhelník** a jeho strany **diagonálními stranami** úplného čtyřrohu A, B, C, D.

Definice (duální): Skupina čtyř přímek a, b, c, d v rovině, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, se nazývá **úplný čtyřstran** $a,\ b,\ c,\ d$. Přímky a, b, c, d se nazývají jeho **strany**. Šest bodů, z nichž každý je incidentní se dvěma z těchto stran, nazýváme **vrcholy** úplného čtyřstranu a, b, c, d. Tyto vrcholy lze spojit ještě dalšími třemi přímkami p, q, r, jimž říkáme **diagonální strany**; trojúhelník jimi určený se nazývá **diagonální trojúhelník** a jeho vrcholy pak **diagonálními vrcholy** úplného čtyřstranu a, b, c, d.

Věta 53. *Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy a pár bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou, dvě dvojice bodů, jež se navzájem oddělují harmonicky.*

6.2 Úlohy

1. K větě 53 vyslovte větu **duální** a tu **dokažte**.

2. Dvě protější strany úplného čtyřrohu jsou harmonicky sdruženy vzhledem k příslušným diagonálním stranám. Dokažte.

3. Ke konstrukci harmonické čtveřice bodů (doplnit D, známe-li A, B, C) vymyslete konstrukci duální, tj. konstrukci harmonické čtveřice přímek.