3 Geometrie ve škole

„Geometrie by měla být od samého začátku orientována na poznávání prostoru, v němž žák žije, a na rozvíjení představivosti. Základem zde mohou být zkušenosti s dělením prostoru, s vyplňováním prostoru, s pohybem v prostoru a s dimenzí prostoru.“ (František Kuřina, [7], str. 40)

Uvedené čtyři způsoby nakládání s prostorem tvoří základní rámec našeho poznávání geometrie v předmětu *Základy geometrie*.

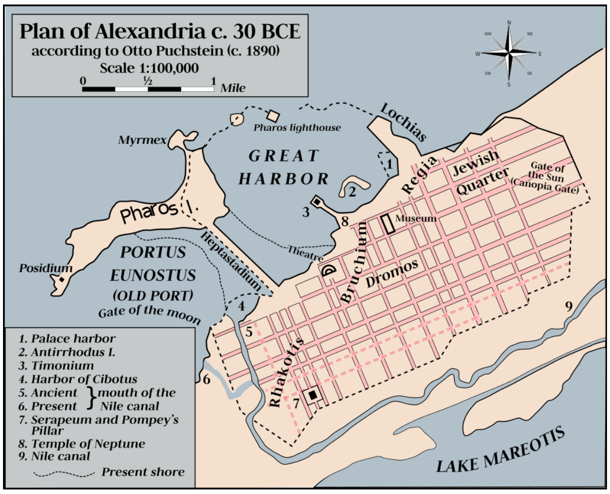
- Prostor lze dělit na části
  bod, přímka, úsečka, kružnice, trojúhelník, rovina, bod dělí přímku, přímka rovinu, rovina prostor, kružnice dělí rovinu atd.
  Jordanova věta: *Rovinná křivka, která sama sebe neprotíná a je uzavřená, dělí rovinu na dvě oblasti.* [7]

- Části prostoru lze vyplňovat
  obsah útvaru, délka úsečky, dělení roviny čtvercovou sítí, Jordanova teorie míry, dlažba, Escher, problém čtyř barev, objem tělesa, Keplerova domněnka

- V prostoru se lze pohybovat
  vektory, shodné transformace, rýsování, modelování

- V prostoru existují útvary trojdimenzionální, dvojdimenzionální, jednodimenzionální
  krychle a její obrázek, koule a její stín, průměty trojrozměrného útvaru do roviny

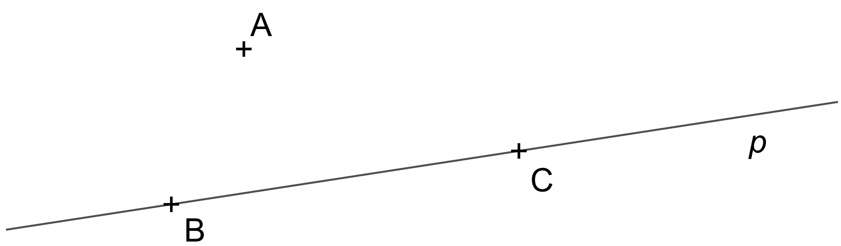
4 Geometrické útvary v rovině



Obrázek 12: Plán starověké Alexandrie, https://commons.wikimedia.org

Jestliže rovinu chápeme jako množinu bodů, potom uvažované geometrické útvary jsou jejími podmnožinami. Jedná se o abstraktní objekty, jejichž předobrazem jsou jevy a vlastnosti reálného prostoru.

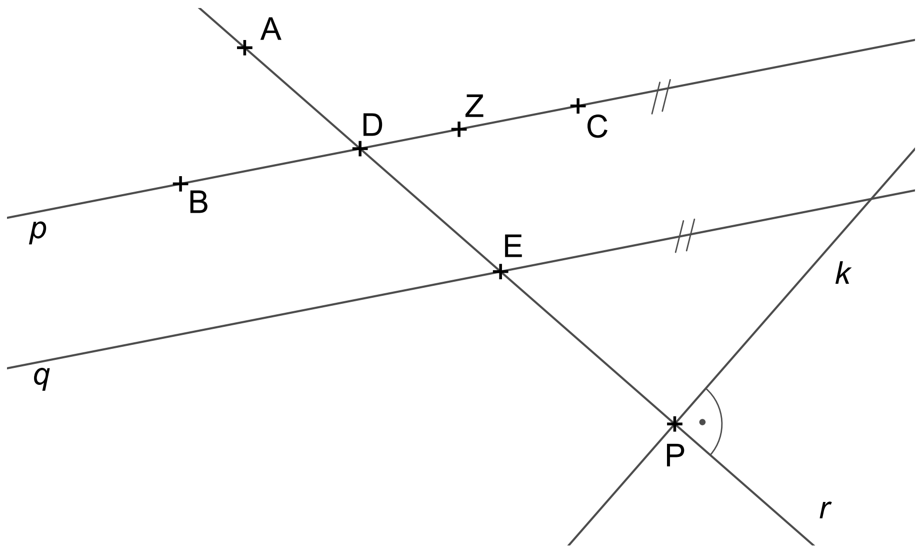
4.1 Body, přímky, polopřímky, poloroviny



Obrázek 13: Body, přímka, úsečka

Viz Obr. 13:

Přímka p je určená body B, C	$p = \leftrightarrow BC$
Bod B leží na přímce p	$B \in p$
Bod A neleží na přímce p	$A \notin p$
Úsečka s krajními body A, B	AB

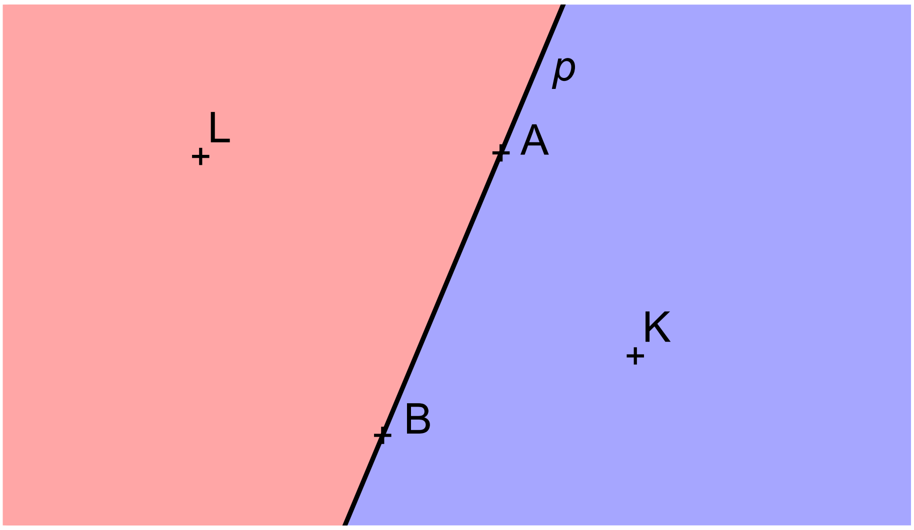


Obrázek 14: Přímky rovnoběžné a různoběžné, polopřímky

Polopřímka je část přímky určená *počátkem* a aspoň jedním *vnitřním bodem.*

Viz Obr. 14:

Přímky p, q jsou rovnoběžné (rovnoběžky)	$p\|q$
Přímky $\leftrightarrow BC$, q jsou rovnoběžné	$\leftrightarrow BC \parallel q$
Přímky p, r nejsou rovnoběžné (v rovině jsou tedy různoběžné)	$p \nparallel r$
Přímky m, n jsou splývající (totožné) (též pokládáme za rovnoběžné) (*Pozn.: Nejsou na Obr. 14*)	$m = n$
Polopřímka s počátkem D jdoucí bodem C	$\mapsto DC$
Bod Z je bodem polopřímky $\mapsto DC$	$Z \in \mapsto DC$
Opačné polopřímky se společným počátkem D	$\mapsto DC, \mapsto DB$
Bod D je průsečíkem přímek (různoběžek) p a r	$D \in p \cap r$
Přímky k, r jsou navzájem kolmé (kolmice), tj. k je kolmá (kolmice) k r a naopak, r je kolmá (kolmice) ke k	$k \perp r$ $r \perp k$
Bod P je patou kolmice kolmice k	$P \in k \cap r \wedge k \perp r$



Obrázek 15: Polorovina, opačné poloroviny

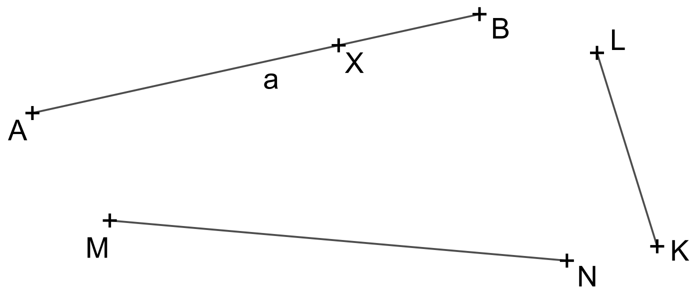
Polorovina je část roviny určená *hraniční přímkou* a aspoň jedním *vnitřním bodem*.

Viz Obr. 15:

Polorovina s hraniční přímkou $\leftrightarrow BC$ a vnitřním bodem K	$\mapsto BCK$
Polorovina s hraniční přímkou p a vnitřním bodem K	$\mapsto pK$
Hraniční přímka p náleží polorovině $\mapsto pK$ (tj. je její podmnožinou)	$p \subset \mapsto pK$
Body A, K leží v polorovině $\mapsto pK$ (přitom A je bodem její hraniční přímky, K je její vnitřní bod)	$A \in \mapsto pK$ $K \in \mapsto pK$
Opačné poloroviny se společnou hraniční přímkou p, jedna s vnitřním bodem K, druhá s vnitřním bodem L	$\mapsto pK$ $\mapsto pL$

4.2 Úsečky

Úsečka je část přímky ohraničená dvěma body (*krajní body*). Též můžeme říci, že je to přímá spojnice těchto dvou bodů.



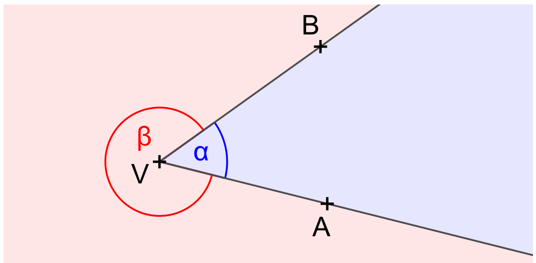
Obrázek 16: Úsečka AB

Viz Obr. 16:

Úsečka s krajními body A, B	AB nebo BA
Úsečka a s krajními body A, B	$a = AB$
Bod X je vnitřním bodem úsečky a	$X \in a$ nebo $X \in AB$
Délka úsečky AB	$\|AB\|$
Usečky AB a MN mají stejné délky	$\|AB\| = \|MN\|$
Usečky AB a KL nemají stejné délky	$\|AB\| \neq \|KL\|$

4.3 Úhly

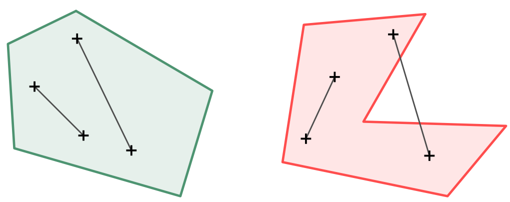
Úhel je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami (*ramena úhlu*) se společným počátkem (*vrchol úhlu*).



Obrázek 17: Úhly α, β; α je konvexní, β je nekonvexní

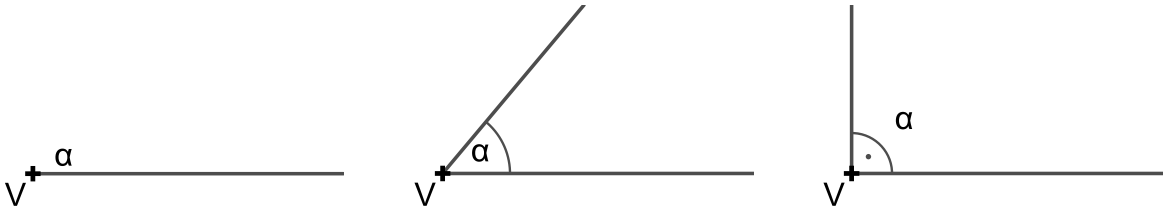
Dvě ramena spolu s vrcholem tvoří dva úhly, viz Obr. 17. Potřebujeme-li je rozlišit, použijeme přívlastky *konvexní*, *nekonvexní*, pokud nejsou oba úhly *přímé* (místo pojmu *nekonvexní úhel* se někdy používá též označení *dutý úhel* nebo *konkávní úhel*).

Další možností je uvažovat dané úhly jako orientované (tj. rozlišovat u nich mezi *prvním* a *druhým* ramenem) a zadat je v témže smyslu (*kladném*, proti směru pohybu hodinových ručiček, nebo *záporném*, po směru pohybu hodinových ručiček). Zadání úhlů z Obr. 17 v kladném smyslu by potom vypadala takto: $\alpha = \sphericalangle AVB$, $\beta = \sphericalangle BVA$.

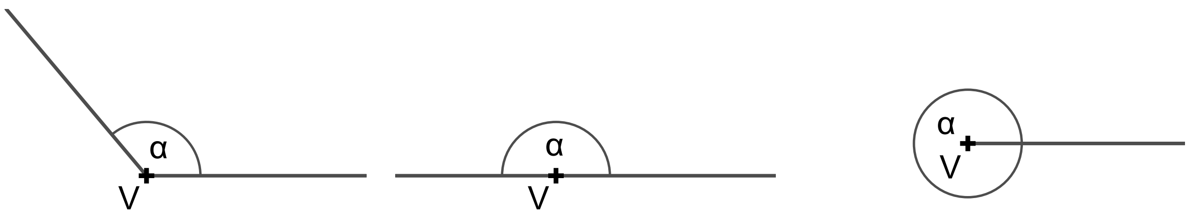


Obrázek 18: Konvexní útvar (vlevo) a nekonvexní, též konkávní, útvar (vpravo)

Poznámka (*Konvexní* a *nekonvexní* (*konkávní*) útvar)**.** Útvar (množina bodů) je *konvexní*, jestliže pro každé dva jeho body je úsečka, která je spojuje, jeho podmnožinou, viz Obr. 18, vlevo. *Nekonvexní*, též *konkávní*, je potom útvar, v němž se nacházejí takové body, že jejich spojnice není jeho podmnožinou, tj. nenáleží mu celá, viz Obr. 18, vpravo.



Obrázek 19: Úhel α: nulový ($\alpha = 0°$), ostrý ($0° < \alpha < 90°$), pravý ($\alpha = 90°$)



Obrázek 20: Úhel α: tupý ($90° < \alpha < 180°$), přímý ($\alpha = 180°$), plný ($\alpha = 360°$)

Na obrázcích 19 a 20 jsou postupně zobrazeny tyto úhly: *nulový*, *ostrý*, *pravý*, *tupý*, *přímý* a *pravý*.

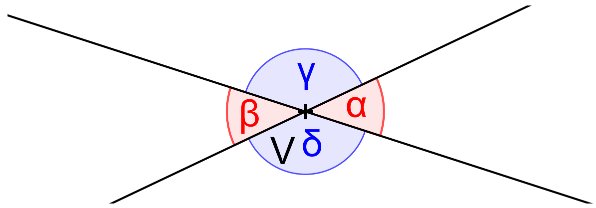
PŘÍKLAD 4.1. *Rozhodněte, které z úhlů na obrázcích 19 a 20 jsou konvexní a které jsou nekonvexní.*

Dva úhly, které mají stejnou velikost, nazýváme *shodné úhly*.

Úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle MUN$ mají stejnou velikost	$\lvert\sphericalangle AVB\rvert = \lvert\sphericalangle MUN\rvert$
Úhly α a β mají stejnou velikost	$\alpha = \beta$
Úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle MUN$ jsou shodné	$\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle MUN$
Úhly α a β jsou shodné	$\alpha \cong \beta$

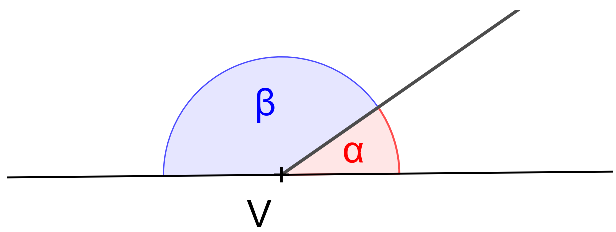
Dvojice úhlů

Dvojice shodných úhlů se společným vrcholem, jejichž ramena jsou opačné polopřímky, nazýváme *vrcholové úhly*. Na Obr. 21 jsou dvě dvojice vrcholových úhlů: α, β a γ, δ.



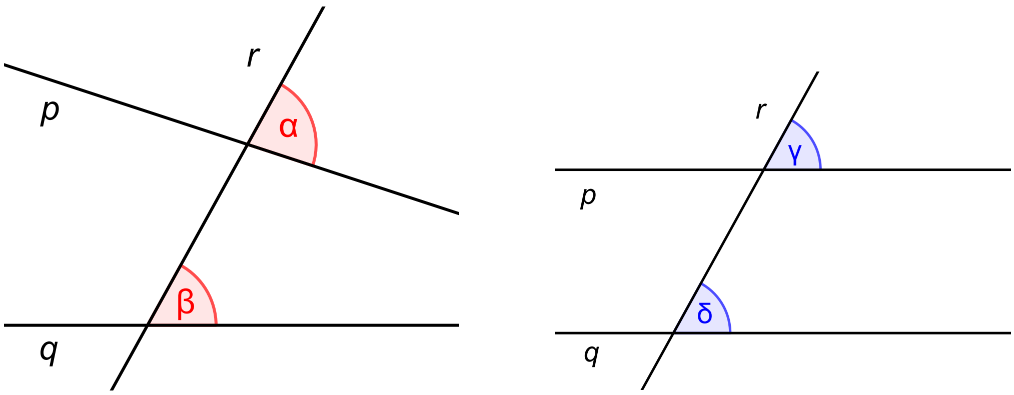
Obrázek 21: Vrcholové úhly α, β, resp. γ, δ

Dvojice konvexních úhlů, které mají jedno rameno společné a jejichž zbývající ramena jsou opačné polopřímky, nazýváme *vedlejší úhly*. Na Obr. **??** je dvojice vedlejších úhlů α, β. Je zřejmé, že součtem vedlejších úhlů je přímý úhel, tj. $\alpha + \beta = 180°$.

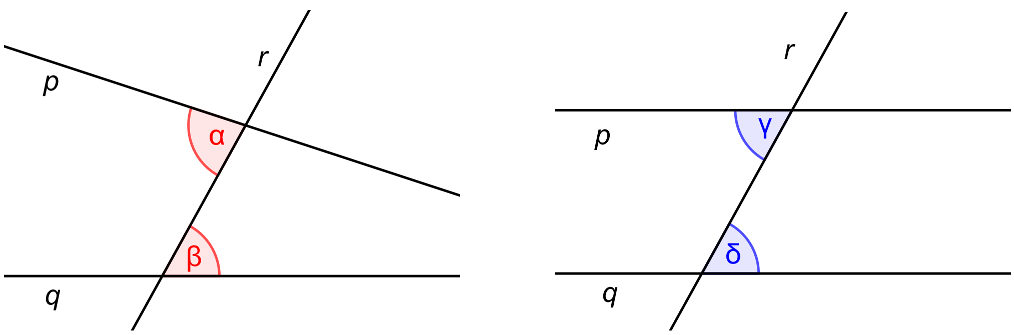


Obrázek 22: Vedlejší úhly α, β; $\alpha + \beta = 180°$

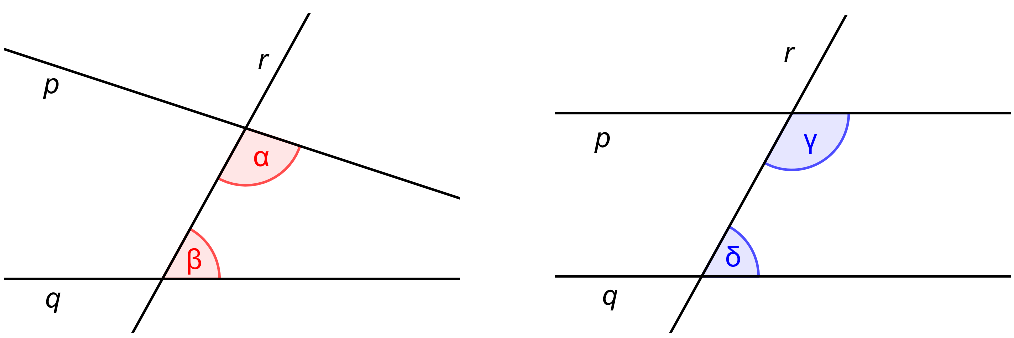
Pokud dvě přímky (p, q, viz Obr. 23, 24, 25) protneme třetí přímkou (r, viz Obr. 23, 24, 25), vznikají tři dvojice úhlů: *úhly souhlasné*, *úhly střídavé* a *úhly přilehlé*. Pokud jsou ony dvě přímky p, q rovnoběžné (viz Obr. 23, 24, 25, vždy vpravo), jsou úhly souhlasné stejně jako střídavé shodné, zatímco součet úhlů přilehlých je 180° (viz též Obr. 10 na str. 10)



Obrázek 23: Souhlasné úhly; $\alpha \neq \beta$, ale $\gamma = \delta$

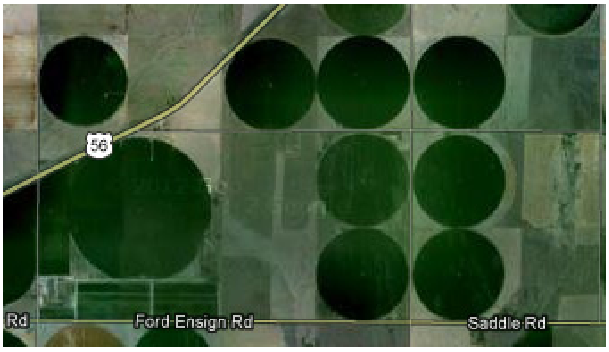


Obrázek 24: Střídavé úhly; $\alpha \neq \beta$, ale $\gamma = \delta$



Obrázek 25: Přilehlé úhly; $\alpha + \beta \neq 180°$, ale $\gamma + \delta = 180°$

4.4 Kružnice

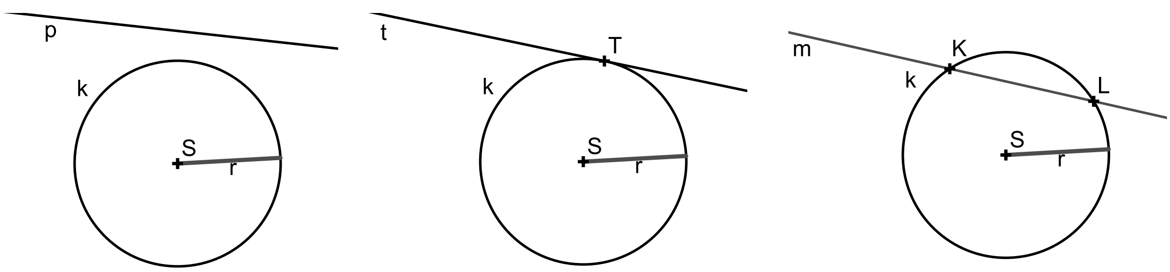


Obrázek 26: Kruhy v krajině

Kružnice k se středem S a poloměrem r je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od S je rovna r, značíme $k(S, r)$.

Kruh K se středem S a poloměrem r je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od S je menší nebo rovna r, značíme $K(S, r)$.

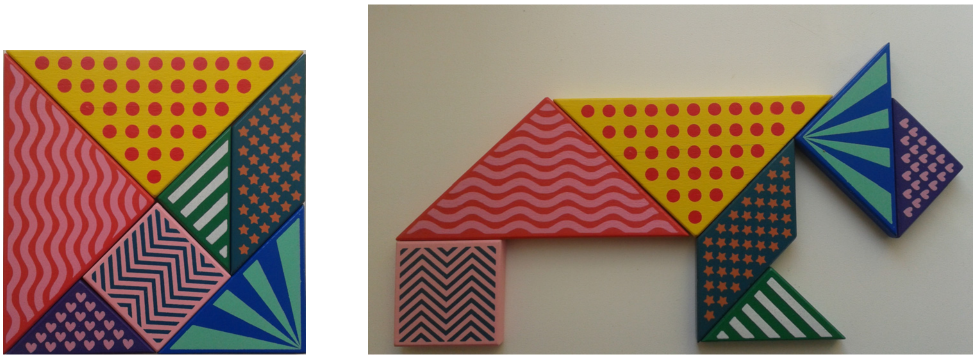
Rozlišujeme tři případy vzájemné polohy přímky a kružnice: *vnější přímka kružnice* (viz Obr. 27, vlevo), *tečna kružnice* (viz Obr. 27, uprostřed; tečna t s *bodem dotyku* T), *sečna kružnice*



Obrázek 27: Vzájemná poloha přímky a kružnice

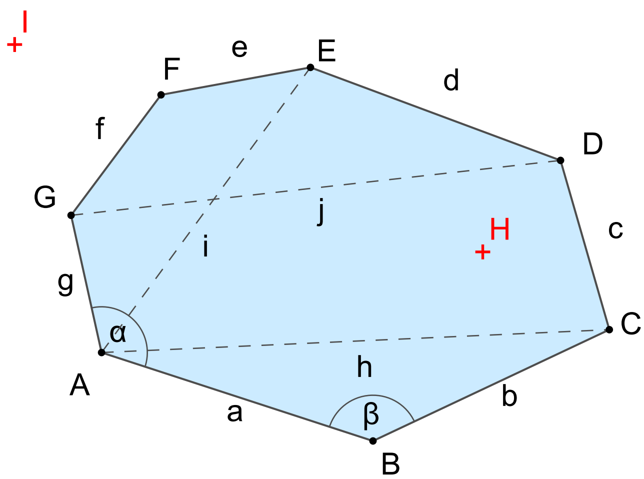
Úsečku spojující dva různé body kružnice nazýváme *tětiva kružnice*. Na Obr. 27, vpravo, je tětiva KL, která je částí sečny m, tj. $KL \subset m$.

4.5 Mnohoúhelníky



Obrázek 28: Tangram

Mnohoúhelník můžeme charakterizovat jako část roviny ohraničenou uzavřenou lomenou čarou (tj. čarou, která se skládá z na sebe navazujících úseček). Již víme, že rozlišujeme *konvexní* a *nekonvexní* mnohoúhelníky, viz str. 17.



Obrázek 29: Mnohoúhelník, konkrétně konvexní 7-úhelník

Mnohoúhelník s n vrcholy nazýváme $n-$úhelník. Rozlišujeme u něj *vrcholy* (viz Obr. 29, body A, B, C, D, E, F, G), *strany* (a, b, c, d, e, f, g), *vnitřní* a *vnější body* (viz např body H, I, v daném pořadí), *úhlopříčky* (viz např. h, i, j) a *vnitřní úhly* (viz např. α, β).

PŘÍKLAD 4.2. *Kolik úhlopříček má $n-$úhelník? Vyřešte nejprve pro $n = 5$, potom hledejte obecný vztah.*

Literatura

[1] Devlin, K. *Jazyk matematiky.* ARGO, 2003.

[2] Askew, M. a S. Ebbutt. *Geometrie bez (m)učení: od Pythagora k dobývání vesmíru: abeceda geometrie v každodenním životě: fascinující tvary a konstrukce.* Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4125-3.

[3] Eukleides, *Základy. Knihy I–IV.*, koment. Petrem Vopěnkou, OPS, Nymburk, 2008.

[4] Eukleides, *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907.
Dostupné na `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf`

[5] Kuřina, F. *10 geometrických transformací.* Prometheus, Praha, 2002.

[6] Kuřina, F. *10 pohledů na geomatrii.* Akademie věd České republiky, Praha, 1996.

[7] Kuřina, F. *Matematika jako pedagogický problém: mé didaktické krédo.* Hradec Králové: Gaudeamus, 2016.

[8] Odvárko, O., Kadleček, J. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia.* Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-276-7.

[9] Pavlíček, J. B. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského.* Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1953.
Dostupné na `http://dml.cz/dmlcz/402750`

[10] Polák, J. *Přehled středoškolské matematiky.* 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.

[11] Vopěnka, P. *Trýznivé tajemství.* Práh, Praha, 2003.

[12] Vyšín, J. a kol.: Geometria pre pedagogické fakulty II, Bratislava, 1970.