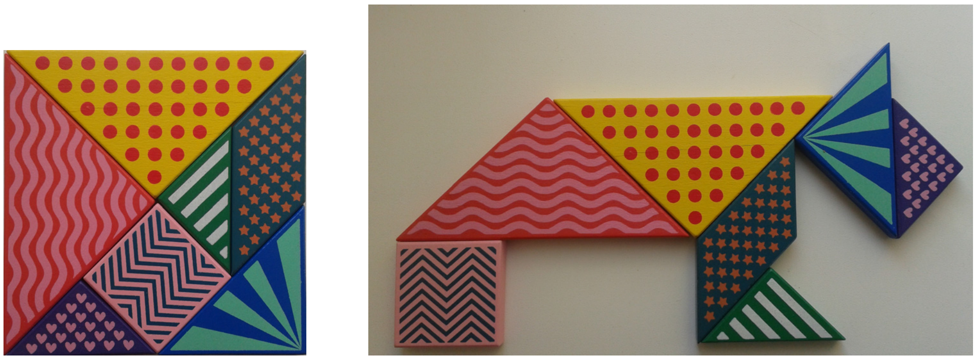
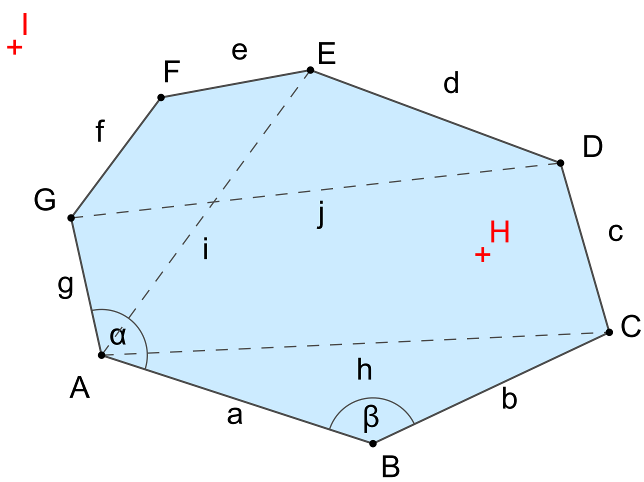
4.5 Mnohoúhelníky



Obrázek 28: Tangram

Mnohoúhelník můžeme charakterizovat jako část roviny ohraničenou uzavřenou lomenou čarou (tj. čarou, která se skládá z na sebe navazujících úseček). Již víme, že rozlišujeme *konvexní* a *nekonvexní* mnohoúhelníky, viz str. 17.



Obrázek 29: Mnohoúhelník, konkrétně konvexní 7-úhelník

Mnohoúhelník s n vrcholy nazýváme $n-$úhelník. Rozlišujeme u něj *vrcholy* (viz Obr. 29, body A, B, C, D, E, F, G), *strany* (a, b, c, d, e, f, g), *vnitřní* a *vnější body* (viz např body H, I, v daném pořadí), *úhlopříčky* (viz např. h, i, j) a *vnitřní úhly* (viz např. α, β).

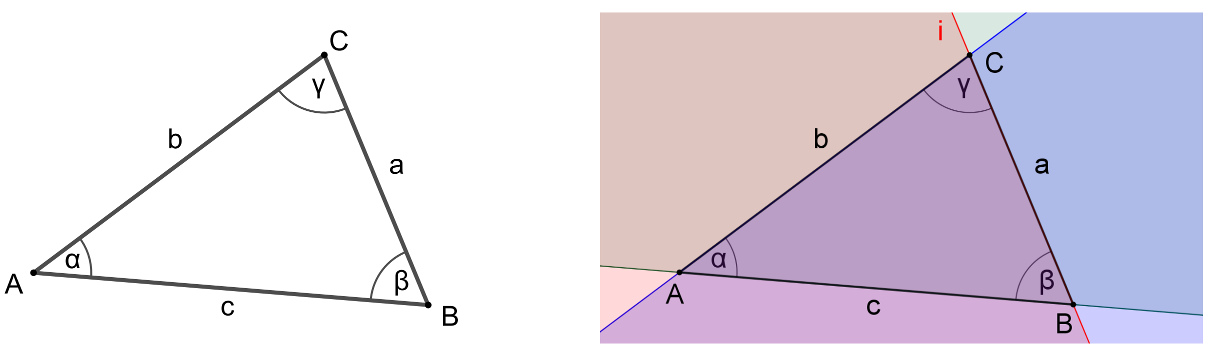
PŘÍKLAD 4.2. *Kolik úhlopříček má $n-$úhelník? Vyřešte nejprve pro $n = 5$, potom hledejte obecný vztah.*

Poznámka. Nezapomínejme na to, že pojmem *mnohoúhelník* rozumíme rovinný útvar, jehož vrcholy (strany) leží v jedné rovině. To samozřejmě platí i pro speciální mnohoúhelníky, jako je čtverec, obdélník, pravidelný $n-$úhelník apod. Pokud neleží všechny vrcholy $n-$úhelníku v rovině, hovoříme o *prostorovém* $n-$*úhelníku*, viz Obr. 30.

Obrázek 30: Prostorové čtyřúhelníky tvoří základ systému zastřešení autobusového nádraží v Českých Budějovicích (plochy, které je vyplňují se nazývají *hyperbolické paraboloidy*). (*Fotografie byla pořízena s laskavým svolením Správy Mercury centra*)

4.6 Trojúhelník

Trojúhelník je mnohoúhelník se třemi vrcholy. Patří do něj i vnitřní body. Definujeme ho tedy jako průnik tří polorovin, na Obr. 31, kde vidíme trojúhelník ABC, se jedná o poloroviny $\mapsto ABC, \mapsto CAB, \mapsto BCA$. Všimněme si, že u trojúhelníku, ne rozdíl od obecného mnohoúhelníku na

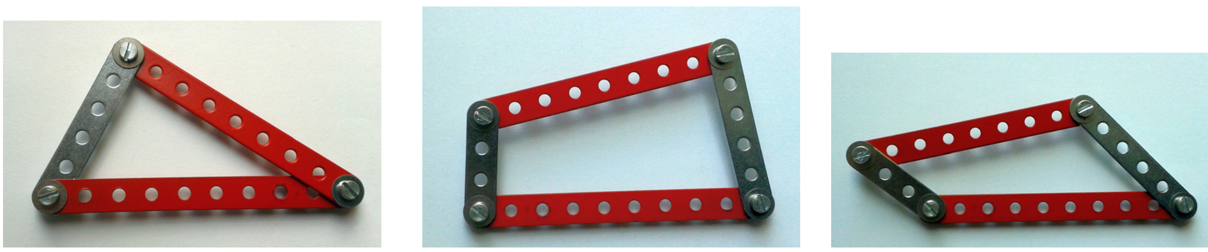


Obrázek 31: Trojúhelník ABC a jeho vznik průnikem tří polorovin

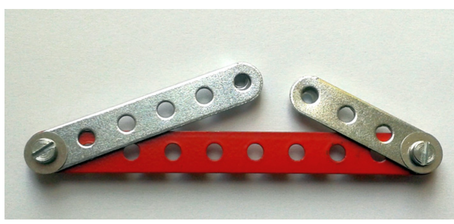
Obr. 29, značíme strany podle *protilehlého vrcholu*.

Pokud není trojúhelník *zdegenerován* do úsečky, jeho vrcholy neleží v jedné přímce. O takových bodech říkáme, že jsou *nekolineární*. Naopak, body (nemusí být tři, může jich být více) ležící v jedné přímce nazýváme *kolineární* body. Obdobně se setkáme s pojmem *komplanární*, pro body ležící v jedné rovině.

Trojúhelník je mezi obecnými mnohoúhelníky unikátní tím, že je jednoznačně určen svými stranami (známe jeho konstrukci podle věty *sss*[1]). Pro ostatní mnohoúhelníky, pokud ovšem nepočítáme speciální typy jako je čtverec, obdélník, lichoběžník a pravidelný n-úhelník, toto neplatí, viz Obr. 32.



Obrázek 32: Na rozdíl např. od čtyřúhelníku je trojúhelník jednoznačně určen svými stranami



Obrázek 33: Součet dvou stran trojúhelníku musí být větší než strana třetí (*trojúhelníková nerovnost*

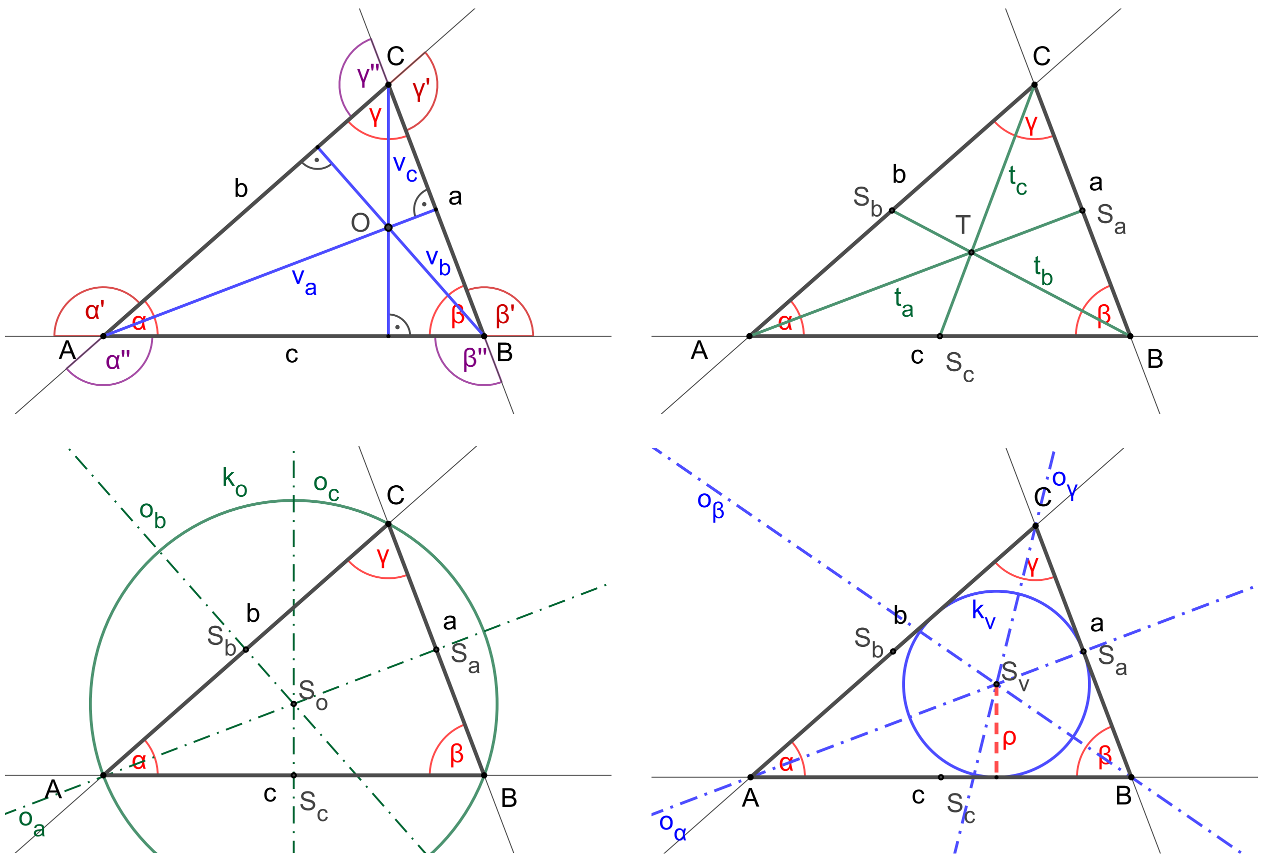
Aby tři úsečky mohly být stranami trojúhelníku, musí splňovat *trojúhelníkovou nerovnost*, viz Obr. 33. Tato základní vlastnost trojúhelníku je zmíněna jako věta 10 na str. 9.

Podle délek stran trojúhelníku rozlišujeme zvláštní typy trojúhelníků, jako jsou *rovnostranné*, *rovnoramenné* nebo *pravoúhlé* (jestliže délky stran

[1]Věta *sss* patří mezi věty o shodnosti trojúhelníků, říká: *Shodují-li se dva trojúhelníky ve všech třech stranách, jsou shodné*. Dalšími větami o shodnosti trojúhelníků jsou: *sus*, *usu* a *Ssu*.

trojúhelníku splňují obrácenou větu k Pythagorově větě, viz věty 7 a 8 na str. 8, je to trojúhelník pravoúhlý).

U libovolného trojúhelníku bychom měli umět rozeznat i sestrojit tyto prvky (viz Obr. 34): *výšky* (v_a, v_b, v_c), *těžnice* (t_a, t_b, t_c), *osy stran* (o_a, o_b, o_c), *osy úhlů* ($o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$), *ortocentrum (průsečík výšek)* (O), *těžiště* (T), *kružnice opsaná* (k_o), *kružnice vepsaná* (k_v, *vnitřní úhly* (α, β, γ), *vnější úhly* (α', β', γ' a $\alpha'', \beta'', \gamma''$).

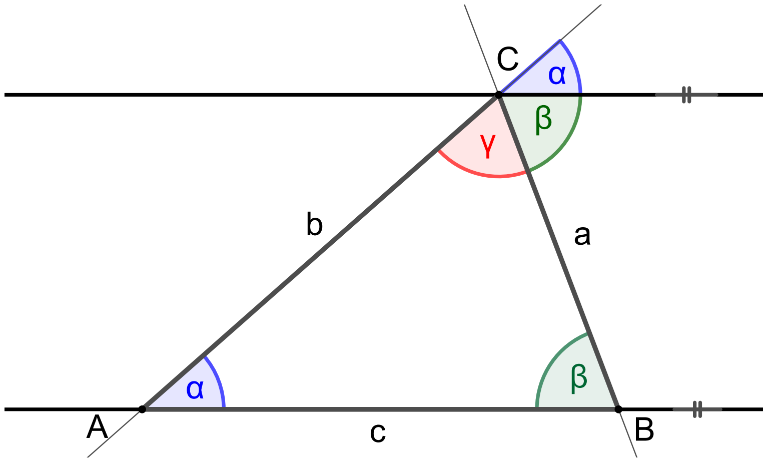


Obrázek 34: Prvky trojúhelníku ABC

Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°, tj. pro trojúhelník ABC na Obr. 34 platí

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Jednoduchý vizuální důkaz tohoto tvrzení, založený na rovnostech dvojice úhlů souhlasných a dvojice úhlů opačných pro rovnoběžné přímky, viz str. 20, je uveden na Obr. 35.



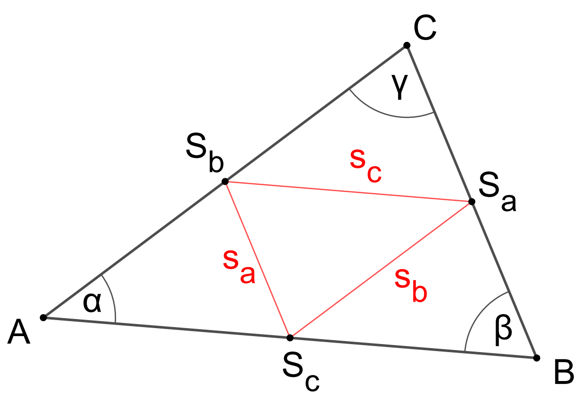
Obrázek 35: Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°

Podle velikostí vnitřních úhlů rozlišujeme trojúhelníky *ostroúhlé*, *pravoúhlé* a *tupoúhlé*, klasifikace úhlů viz str. 18.

PŘÍKLAD 4.3. *Kolik ostrých, tupých či pravých vnitřních úhlů může mít trojúhelník?*

PŘÍKLAD 4.4. *Jaký je vztah mezi vnějším úhlem trojúhelníku (např. α' na Obr. 34) a jemu protilehlými vnitřními úhly (pro vnější úhel α' na Obr. 34 to jsou úhly β a γ)?*

Úsečku, jejíž krajní body jsou středy dvou stran trojúhelníku nazýváme *střední příčka*. V trojúhelníku lze sestrojit tři střední příčky, viz s_a, s_b, s_c na Obr. 36. Platí pro ně následující věta.



Obrázek 36: Střední příčky s_a, s_b, s_c trojúhelníku ABC

Věta 12 (Střední příčky trojúhelníku). *Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jednou z jeho stran (s níž nemá společný bod) a její délka je rovna polovině délky této strany.*

PŘÍKLAD 4.5. *Střední příčky rozdělují trojúhelník (viz např. ΔABC na Obr. 36) na čtyři menší trojúhelníky. Jaký je vztah těchto trojúhelníků mezi sebou a k ΔABC? Odpověď vám pomohou nalézt známé vztahy mezi úhly souhlasnými, resp. střídavými. Pokuste se zjištěné skutečnosti využít k důkazu věty 12.*

Eukleidovské konstrukce trojúhelníku

Uvažujeme-li tyto prvky trojúhelníku: *strany* (a, b, c), *vnitřní úhly* (α, β, γ), *výšky* (v_a, v_b, v_c), *těžnice* (t_a, t_b, t_c), *osy vnitřních úhlů* $(o_\alpha, o_\beta, o_\gamma)$, *poloměr kružnice opsané* (r), *poloměr kružnice vepsané* (ρ), existuje 150 možností, jak třemi z nich trojúhelník ABC zadat, např. $[a, b, c]$; $[a, \alpha, v_a]$; $[o_\alpha, o_\beta, o_\gamma]$; $[\alpha, v_b, t_c]$ apod. Přitom 98 z nich lze sestrojit eukleidovsky (užitím kružítka a pravítka), zbylých 52 nikoliv. Přehled řešení všech 98 úloh najde zájemce v publikaci [11]. Zkuste si některou z nich sestrojit, třeba tu následující, zadanou v příkladu 4.6.

PŘÍKLAD 4.6. *Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány jeho těžnice t_a, t_b, t_c.*

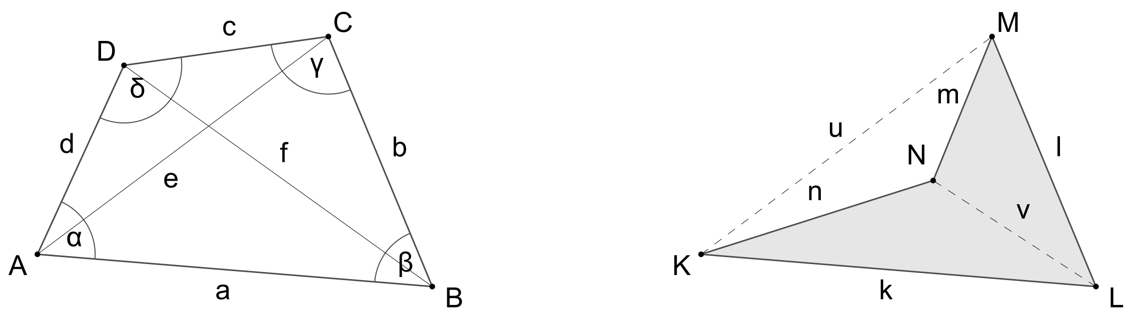
4.7 Čtyřúhelníky

Čtyřúhelník je mnohoúhelník se čtyřmi vrcholy. Dále se budeme zabývat pouze konvexními čtyřúhelníky, jako je čtyřúhelník $ABCD$ na Obr. 37.

Součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku je 360°. Tj. pro čtyřúhelník $ABCD$ na Obr. 37 platí

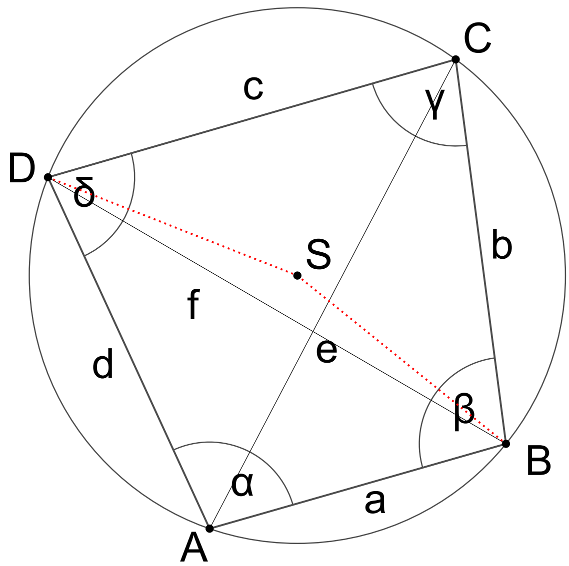
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

PŘÍKLAD 4.7. *Dokažte výše uvedené tvrzení, že součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku je 360°.*



Obrázek 37: Čtyřúhelník konvexní $ABCD$ a nekonvexní $KLMN$

Čtyřúhelníky, kterým lze opsat kružnici nazýváme ***tětivové čtyřúhelníky***, viz Obr. 38. Jejich unikátní vlastností je, že součet protilehlých úhlů je 180°. Pokuste se tuto vlastnost dokázat.

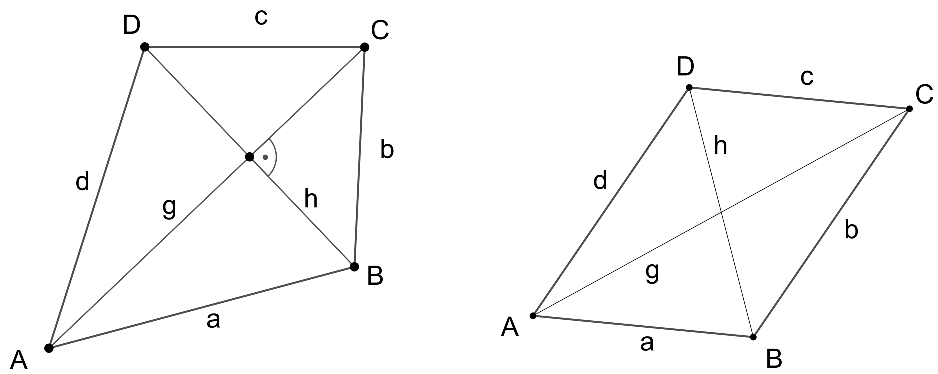


Obrázek 38: Tětivový čyřúhelník $ABCD$; $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

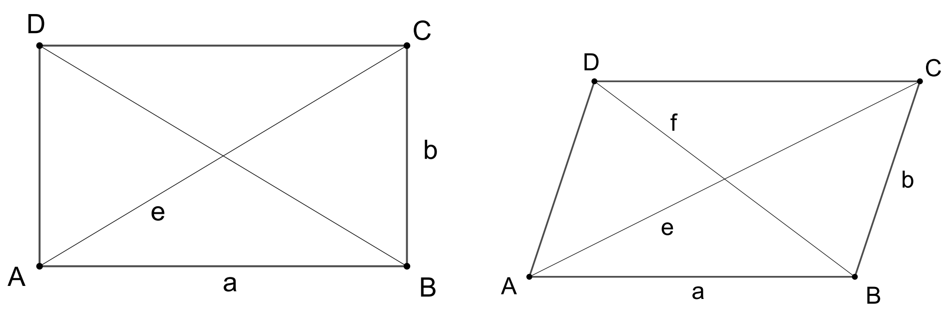
Čtyřúhelník, který je osově souměrný podle jedné z úhlopříček, nazýváme ***deltoid***. Je zřejmé, že má úhlopříčky vzájemně kolmé a jeho strany jsou po dvojicích shodné.

Dalšími speciálními typy čtyřúhelníků jsou ***obdélník*** (protější strany shodné, sousední strany různé, všechny úhly pravé), ***čtverec*** (všechny strany shodné a sousední vždy vzájemně kolmé) a ***lichoběžník*** (dvě protilehlé strany rovnoběžné, nazýváme je ***základny***, zbývající dvě strany různoběžné, nazýváme je *ramena*). Pokud jsou ramena lichoběžníku shodná, nazýváme ho *rovnoramenný* lichoběžník.

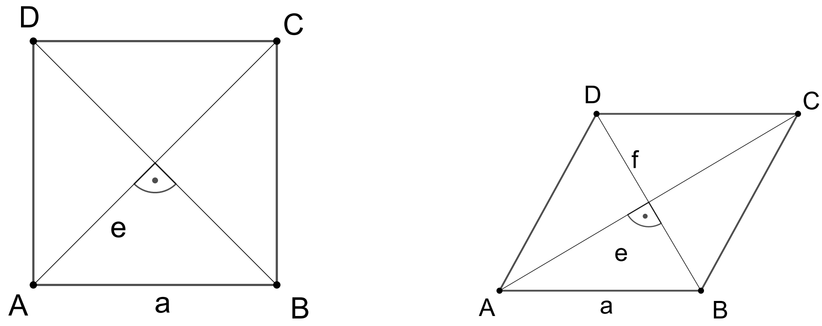
Čtyřúhelník, jehož protější strany jsou navzájem rovnoběžné, nazýváme *rovnoběžník*. Protější strany rovnoběžníku jsou stejně dlouhé. Rovnoběžníky, jejichž sousední strany nejsou k sobě kolmé, můžeme rozdělit na *kosodélníky* a *kosočtverce*. Pokud jsou sousední strany rovnoběžníku k sobě kolmé, jedná se o *obdélník* (sousední strany mají různé délky) nebo *čtverec* (všechny strany jsou stejně dlouhé).



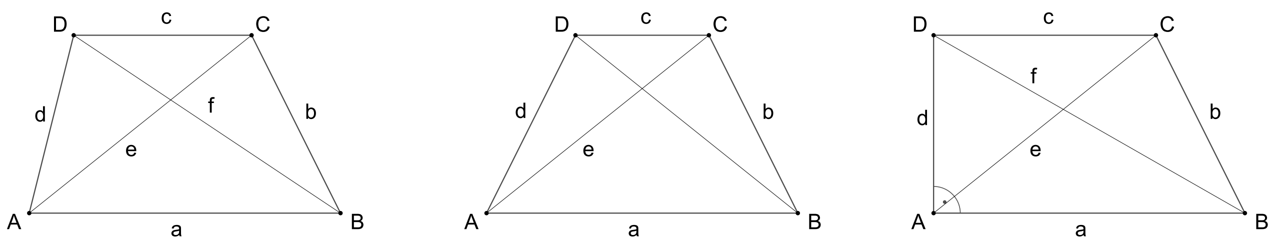
Obrázek 39: Deltoid (vlevo) a rovnoběžník (vpravo)



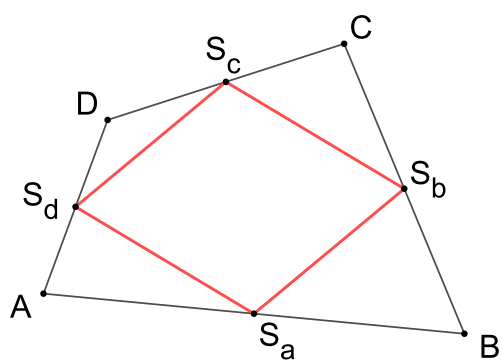
Obrázek 40: Obdélník (vlevo) a kosodélník (vpravo)



Obrázek 41: Čtverec (vlevo) a kosočtverec (vpravo)



Obrázek 42: Lichoběžník (vlevo), rovnoramenný lichoběžník (uprostřed) a pravoúhlý lichoběžník (vpravo)



Obrázek 43: Varignonova věta

Pro libovolný čtyřúhelník platí následující věta pojmenovaná po francouzském matematikovi Pierru Varignonovi (1654-1722).

Věta 13 (Varignonova věta)**.** *Středy stran libovolného čtyřúhelníku tvoří rovnoběžník (jehož stranami jsou střední příčky rovnoběžníku), viz Obr. 43.*

PŘÍKLAD 4.8. *Pokuste se větu 13 dokázat. Využijte při tom větu 12 o středních příčkách trojúhelníku.*

4.8 Pravidelné mnohoúhelníky ($n-$úhelníky)

Obrázek 44: Jednoduchá dlažba – pravidelné šestiúhelníky

Pravidelným mnohoúhelníkem (též *pravidelným $n-$úhelníkem*) rozumíme mnohoúhelník, který má všechny strany a všechny úhly shodné. Pravidelnému mnohoúhelníku lze opsat i vepsat kružnici. Tyto kružnice jsou soustředné a jejich střed nazýváme *středem (pravidelného) mnohoúhelníku.*

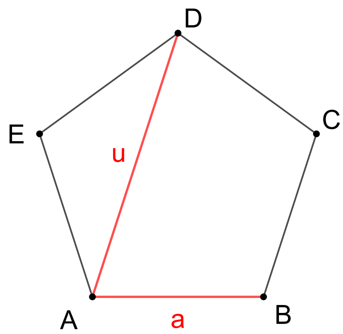
PŘÍKLAD 4.9. *Pravidelný $n-$úhelník má všechny vnitřní úhly stejně velké. Jak závisí jejich velikost na n, tj. na počtu vrcholů $n-$úhelníku? Odvoďte obecný vztah vyjadřující závislost vnitřního úhlu α na n.*

Na Obr. 44 vidíme dlažbu z pravidelných šestiúhelníků. Vidíme, že tyto dlaždice lze uspořádat tak, aby souvisle pokryly celou rovinu (Proč?). Nabízí se tak otázka, jakými pravidelnými $n-$úhelníky jednoho druhu můžeme takto pokrýt rovinu. Odpovědí je, že to jde těmito $n-$úhelníky: *rovnostranným trojúhelníkem*, *čtvercem* a *pravidelným šestiúhelníkem.* Proč to nejde pro jiné pravidelné $n-$úhelníky? Pro pravidelný pětiúhelník vidíme odpověď na Obr. 45.

Zlatý řez v pravidelném pětiúhelníku

Poměr délky úhlopříčky u a strany a pravidelného pětiúhelníku je roven $\dfrac{u}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$, viz Obr. 46. Tento poměr, který se tradičně označuje

Obrázek 45: Kombinovaná dlažba – pravidelné pětiúhelníky a kosočtverce



$$\frac{u}{a} = \frac{3.2360679775}{2} = 1.6180339887$$

Obrázek 46: Zlatý řez v pravidelném pětiúhelníku

písmenem ϕ, nazýváme *zlatý řez*. Pro svoji estetickou působivost je poměr zlatého řezu také označován jako „poměr oku lahodící“. Pro jeho slovní definici si představme úsečku délky $x + y$, kterou rozdělíme na dvě nestejné části, větší x a menší y. Úsečka je jimi rozdělena v poměru zlatého řezu ϕ, jestliže poměr větší z nich ku menší je roven poměru celé úsečky ku větší části, tj. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x+y}{x}$. Po úpravě dostaneme $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$, odkud vychází $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.