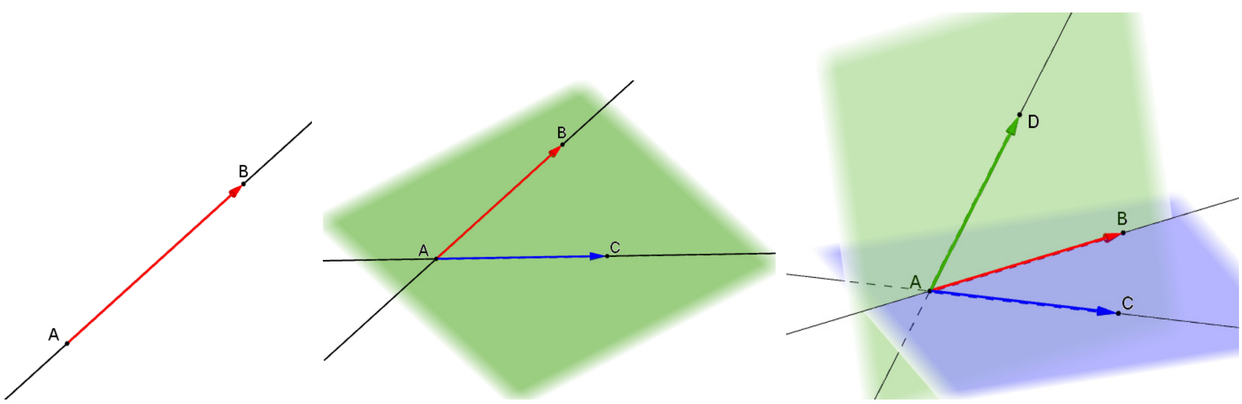
6 Dimenze bodového (pod)prostoru

Přímku, rovinu a prostor chápeme jako množiny bodů, kterým říkáme *bodové prostory*. Pokud je taková množina podmnožinou jiného prostoru, například přímka leží v rovině, nazýváme ji *bodovým podprostorem*.

Prostoru přisuzujeme *dimenzi*. Hovoříme o *jednorozměrném prostoru* (přímka) *dvojrozměrném prostoru* (rovina) nebo o *trojrozměrném prostoru* (prostor).

Dimenzí přitom rozumíme číslo, které udává počet nezávislých *směrů* (reprezentovaných *vektory*; představujte si je jako orientované úsečky), které lze v daném prostoru určit. Směry (vektory) jsou nezávislé, pokud žádný z nich nelze složit z těch ostatních. V přímce je jeden nezávislý směr, proto má dimenzi 1, v rovině lze určit dva nezávislé směry, má tedy dimenzi 2, konečně v prostoru, v němž žijeme, lze identifikovat tři nezávislé směry (např. dva vodorovné a jeden svislý), proto má dimenzi 3, viz Obr. 58.



Obrázek 58: Přímka má dimenzi 1, rovna 2 a (náš) prostor 3

7 Míra

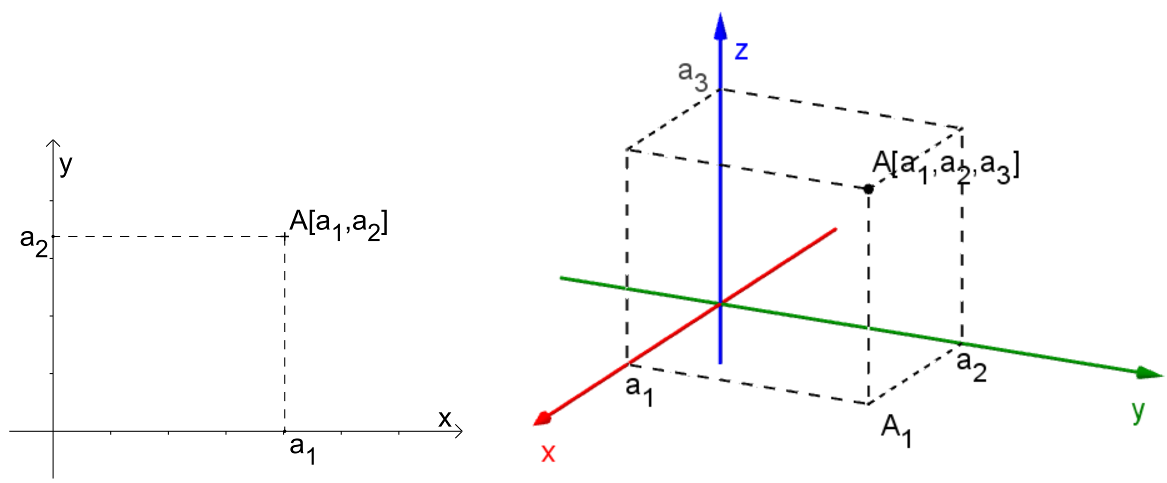
Modelem reálného prostoru, který nás obklopuje, je *eukleidovský (bodový) prostor*. Je to ten prostor, v němž řešíme geometrické úlohy (v planimetrii, stereometrii a analytické geometrii). Eukleidovský prostor dimenze n (viz str. 39) nazýváme $n-$rozměrný. My pracujeme s prostorem jedno-, dvoj-, trojrozměrným. Přívlastkem *eukleidovský* se tradičně vyjadřuje, že v příslušném bodovém prostoru lze měřit vzdálenosti bodů a odchylky přímek (konkrétně odchylky směrů přímek).

7.1 Souřadnice bodu a vektoru

Pro možnost měření vzdálenosti bodů a odchylek směrů vyjádřených vektory zavádíme *souřadnice bodů a vektorů*.

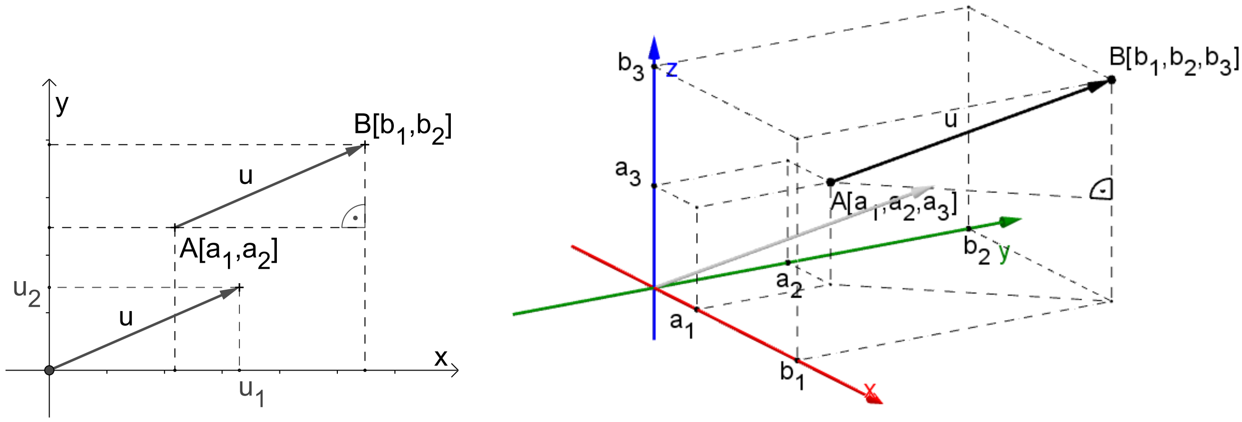
Souřadnice bodu

$A[a_1, a_2]$, $A[a_1, a_2, a_3]$



Obrázek 59: Souřadnice bodu

Souřadnice vektoru



Obrázek 60: Souřadnice vektoru

Vektorem zde rozumíme *geometrický vektor*, který v sobě nese dvě informace: 1) informaci o směru a 2) informaci o velikosti posunutí v tomto směru. Geometrický vektor proto znázorňujeme *orientovanou úsečkou*. Všechny orientované úsečky téže velikosti a směru představují jeden vektor, konkrétní úsečku z nich potom nazýváme *umístěním* tohoto vektoru.

Souřadnice vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$, resp. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, jsou souřadnice koncového bodu jeho umístění, které má počáteční bod v počátku soustavy souřadné, viz Obr. 60. Je-li umístěním vektoru $\vec{u}$ orientovaná úsečka AB, kde A, B jsou libovolné body prostoru, získáme jeho souřadnice z rozdílu souřadnic koncového a počátečního bodu úsečky AB:

$$\vec{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (u_1, u_2),$$

$$\vec{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (u_1, u_2, u_3).$$

7.2 Norma (velikost) vektoru

Normou (též *velikostí*) vektoru rozumíme velikost jeho umístění[2]. Normu vektoru $\vec{u}$ značíme $|\vec{u}|$. Na Obr. 60 vidíme, že v případě dvojrozměrného prostoru můžeme k výpočtu velikosti vektoru využít Pythagorovu větu pro

[2]V tomto případě se přesněji řečeno jedná o tzv. *eukleidovskou normu*, která odpovídá našim představám o vzdálenosti bodů.

pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami u_1, u_2 a s přeponou $|\vec{u}|$. V trojrozměrném prostoru je potom postup analogický, akorát, že Pythagorovu větu uplatníme dvakrát. Platí:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

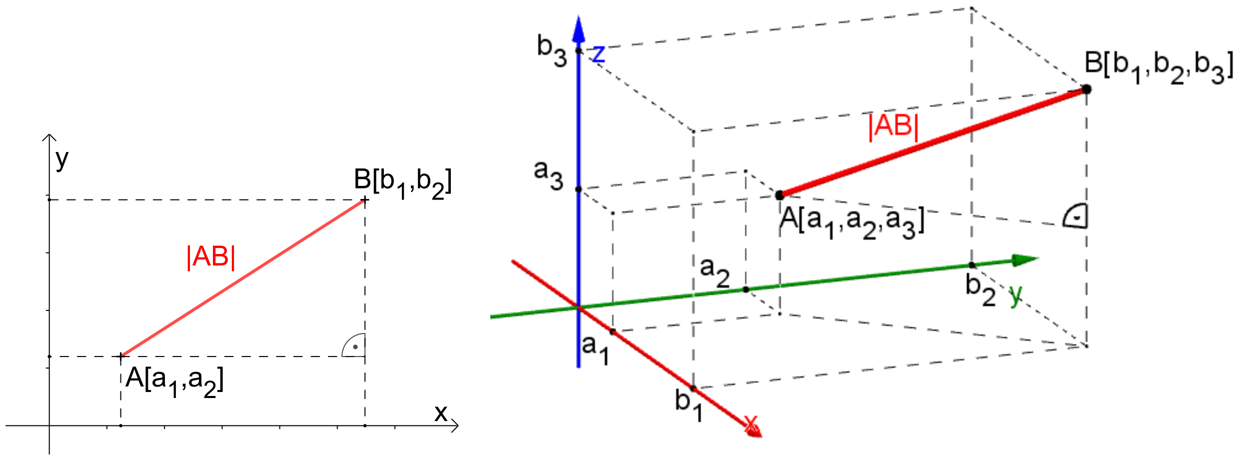
7.3 Vzdálenost bodů

Vzdálenost bodů A, B značíme $|AB|$, viz Obr. 61. Pro body $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$ v rovině platí

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}, \tag{1}$$

pro body $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$ v trojrozměrném prostoru pak platí

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \tag{2}$$

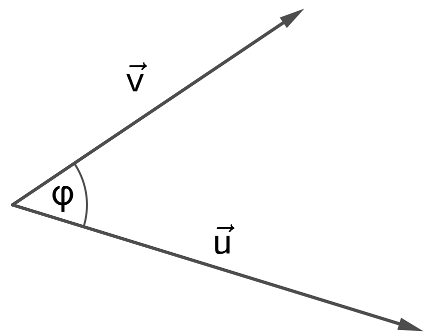


Obrázek 61: Vzdálenost dvou bodů (velikost úsečky)

Vidíme, že vzdálenost dvou bodů je rovna velikosti vektoru, který je jimi určen (tj. orientovaná úsečka definovaná těmito body je jeho umístěním). Můžeme také říci, že vzdálenost dvou bodů je rovna *délce úsečky*, jejímiž krajními body jsou.

7.4 Odchylka dvou vektorů; skalární součin

Pro výpočet odchylek mezi přímkami, rovinami, případně mezi přímkou a rovinou, využíváme schopnost vypočítat odchylku dvou vektorů, tj. velikost úhlu mezi dvěma vektory.



Obrázek 62: Odchylka φ mezi vektory $\vec{u}, \vec{v}$

Pro výpočet odchylky dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ využíváme ***skalární součin*** $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Jedná se o (binární) operaci, která dvěma vektorům přiřazuje číslo (skalár). My pracujeme s tzv. ***eukleidovským skalárním součinem***, který je pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ definován vztahem[3]

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2, \tag{3}$$

pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ pak takto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_2 v_2. \tag{4}$$

Zobecnění pro vektory dimenze n je pak zřejmé. Skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ souvisí s jejich odchylkou φ, viz Obr. 62 prostřednictvím vztahu

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi. \tag{5}$$

Pro výpočet odchylky vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ ho použijeme ve tvaru

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}. \tag{6}$$

[3] Skalární součin se většinou značí tečkou „·“, proto se mu anglicky říká *dotproduct*

7.5 Míra

Vzdálenost bodů A, B interpretujeme též jako *délku úsečky* AB. Délka úsečky je příkladem *míry útvaru*, hovoříme též o *metrice* daného prostoru.

Definice 1 (Míra útvaru)**.** *Mírou útvaru m rozumíme funkci s těmito vlastnostmi:*

1) Každému útvaru X přiřazuje reálné číslo $m(X) \geq 0$ (například délku úsečce, obsah rovinnému útvaru nebo objem trojrozměrnému útvaru).

2) Každým dvěma shodným útvarům X, Y přiřazuje čísla $m(X), m(Y)$, pro která platí: $m(X) = m(Y)$.

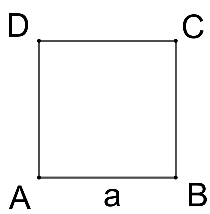
3) Každým dvěma disjunktním[4] útvarům X, Y přiřazuje čísla $m(X), m(Y)$, pro která platí: $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$.

4) Aspoň jednomu útvaru E přiřazuje číslo $m(E) = 1$.

Existuje řada způsobů, jak definovat funkci m. My budeme pracovat s *eukleidovskou metrikou*, založenou na vztahu (1), resp. (2).

8 Obsah a obvod rovinného útvaru

Čtverec

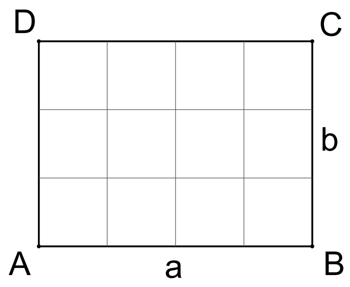


Obsah: $S = a^2$

Obvod: $o = 4a$

[4]Množiny jsou *disjunktní*, právě když nemají žádný společný bod.

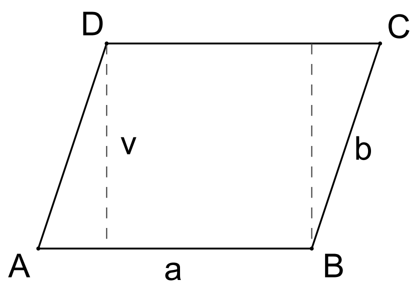
Obdélník



Obsah: $S = ab$

Obvod: $o = 2(a + b)$

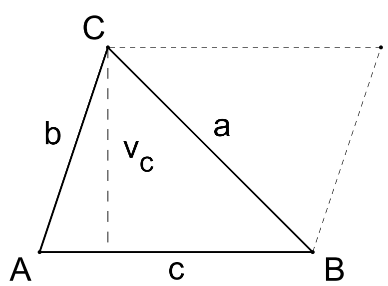
Rovnoběžník



Obsah: $S = av$

Obvod: $o = 2(a + b)$

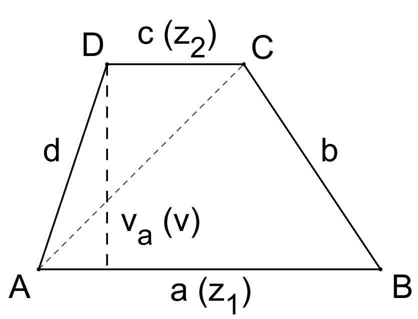
Trojúhelník



Obsah: $S = \dfrac{zv}{2} = \dfrac{cv_c}{2} = \dots$

Obvod: $o = a + b + c$

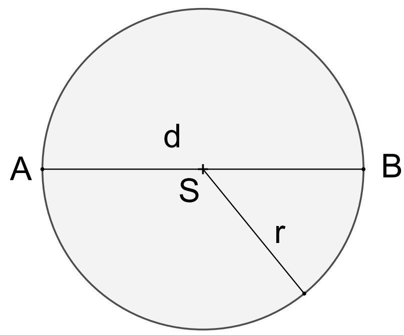
Lichoběžník



Obsah: $S = \dfrac{(z_1 + z_2)v}{2} = \dfrac{(a + c)v_a}{2}$

Obvod: $o = a + b + c + d$

Kruh, kružnice



Obsah: $S = \pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$

Obvod: $o = 2\pi r = \pi d$

Ludolfovo číslo π

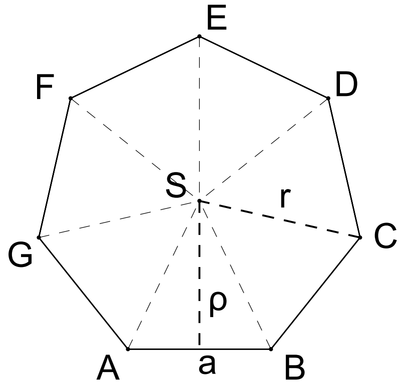
Ludolph van Ceulen, 1540–1610, německý matematik.

Pro všechny kruhy je poměr jejich obvodu a průměru roven témuž číslu, tzv. Ludolfovu číslu π,

$$\pi = \frac{o}{d}.$$

Toto číslo je iracionální, tj. v jeho desetinném rozvoji neexistuje žádná periodicita. Od okamžiku poznání tohoto poměru trvají snahy o výpočet jeho hodnoty na co nejvíce desetinných míst. Tato historie je zachycena například na stránce Wikipedia: Chronology of computation of π. Jedním z matematiků, kteří se výpočtu hodnoty π intenzivně věnovali, byl Ludolph van Ceulen, po němž je toto číslo pojmenováno. Pro výpočty většinou používáme přibližnou hodnotu $\pi \doteq 3,14$. Pro usnadnění zapamatování si čísla π na více desetinných míst se používají různé říkanky, v nichž počet písmen ve slovu představuje příslušnou cifru. Například hodnota $\pi \doteq 3,141592653589$ je uchována takto: „Lín a kapr u hráze prohlédli si rybáře, udici měl novou, šupináči neuplavou.“

Pravidelný n–úhelník

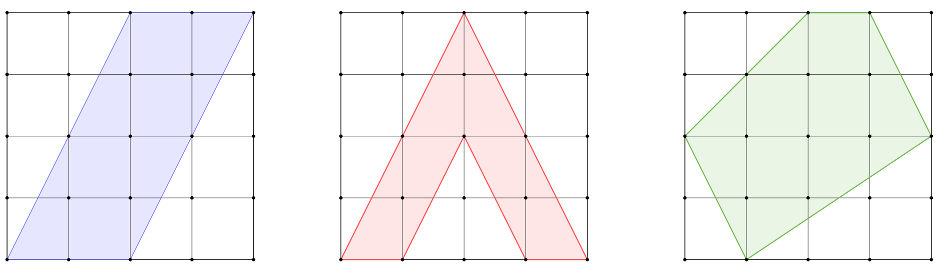


Obsah: $S = \dfrac{n\,a\,\rho}{2} = \dfrac{n\,r^2 \sin\frac{360^\circ}{n}}{2} = \dfrac{o\,\rho}{2}$

Obvod: $o = n\,a$

9 Využití čtvercové sítě k určení obsahu rovinného útvaru

PŘÍKLAD 9.1. *Vypočtěte obsahy a obvody barevných mnohoúhelníků na Obr. 63, délka strany čtverečku sítě je 1.*

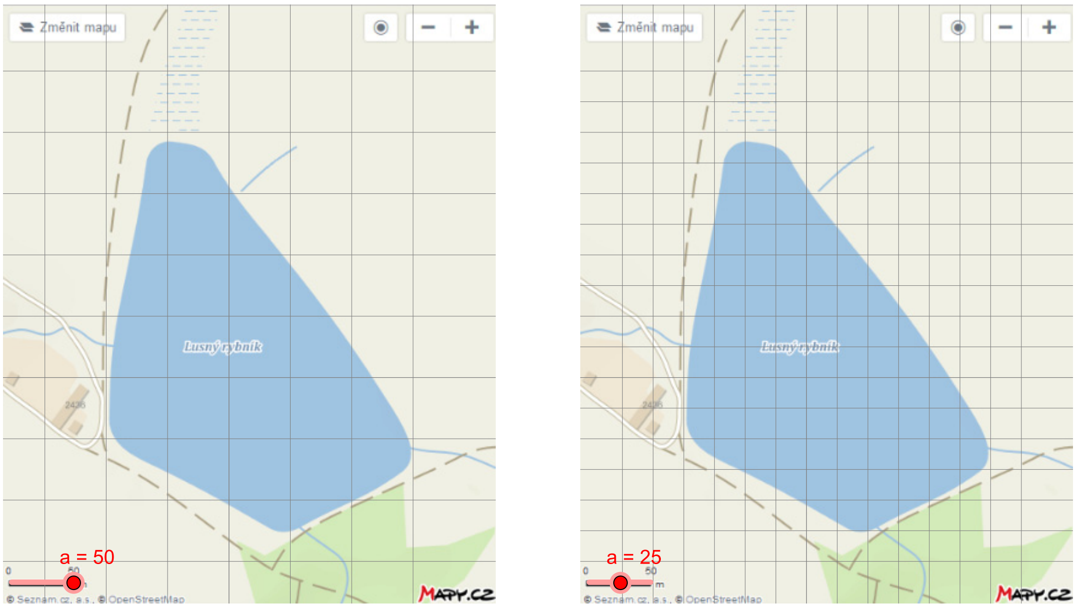


Obrázek 63: Vypočtěte obsahy barevných mnohoúhelníků

PŘÍKLAD 9.2. *S využitím map s čtvercovými sítěmi na Obr. 64 odhadněte obsah plochy rybníka Lusný. Pro kterou síť dostanete přesnější odhad?*

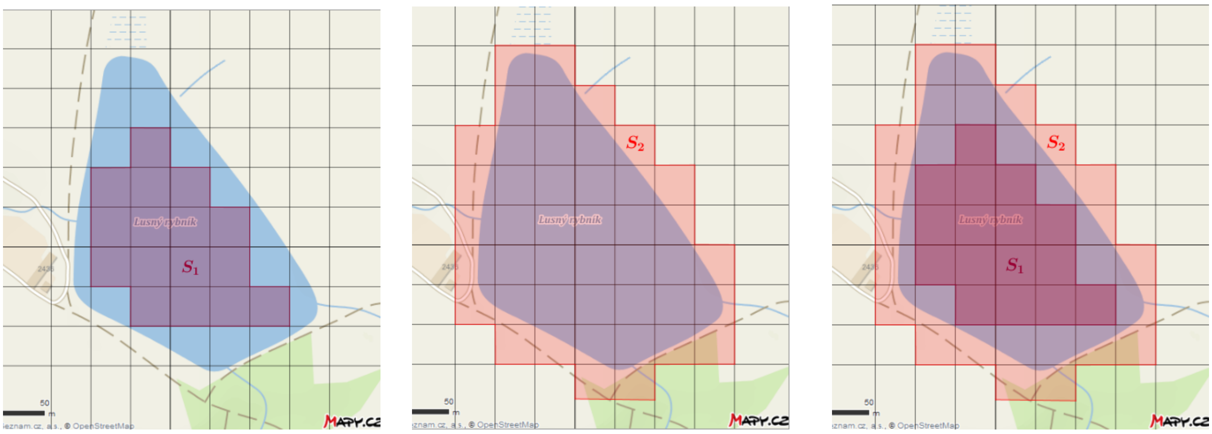
Jordanova–Peanova míra

Na metodě měření obsahu plošného obrazce pomocí čtvercové sítě je založena myšlenka *Jordanovy–Peanovy míry* (*Camille Jordan*, 1838–1922, francouzský matematik; *Giuseppe Peano*, 1858–1932, italský matematik). Princip této metody stručně objasníme s využitím Obr. 65 a dle [12], kde



Obrázek 64: Plocha rybníka Lusného; strana čtverce $50\,m$ (vlevo) a $25\,m$ (vpravo)

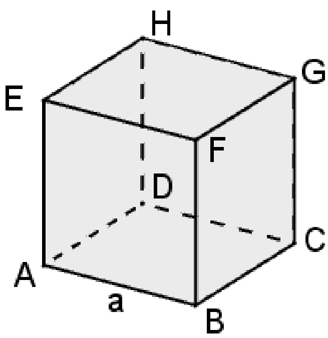
lze najít detailnější informace. Označme S_1 součet obsahů všech čtverců, jejichž všechny body náleží měřenému útvaru (tj. žádná jejich část ho nepřesahuje) a S_2 součet obsahů všech čtverců, které mají s útvarem (kam počítáme i jeho hranici) společný aspoň jeden bod. Pokud čtvercovou síť neomezeně zjemňujeme, konvergují tyto součty k hodnotám (limitám), z nichž první nazýváme *vnitřní Jordanova–Peanova míra*, druhou pak *vnější Jordanova–Peanova míra* daného útvaru (tj. dané množiny bodů) U. Jestliže jsou tyto hodnoty stejné, nazývá se daná množina *měřitelná v Jordanově–Peanově smyslu*. Společná hodnota se pak nazývá *Jordanova–Peanova míra* útvaru (množiny) U, [12].



Obrázek 65: Výpočet obsahu plochy rybníka Lusného; Jordanova–Peanova míra [12]

10 Objem a povrch trojrozměrného útvaru

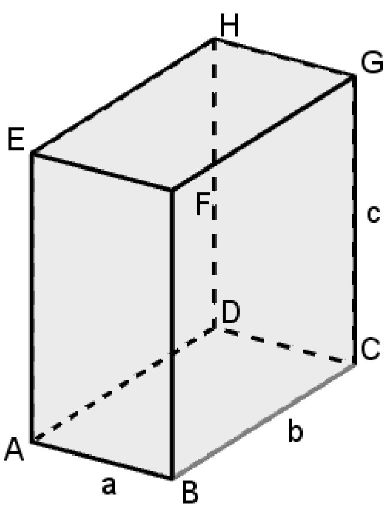
Krychle



Objem: $V = a^3$

Povrch: $S = 6a^2$

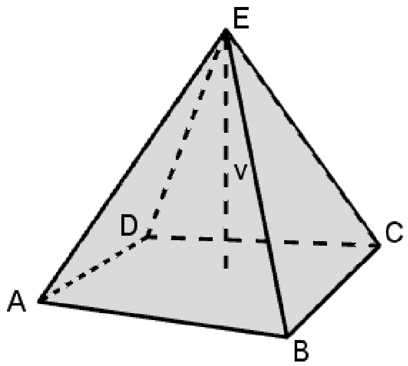
Kvádr



Objem: $V = abc$

Povrch: $S = 2(ab + ac + bc)$

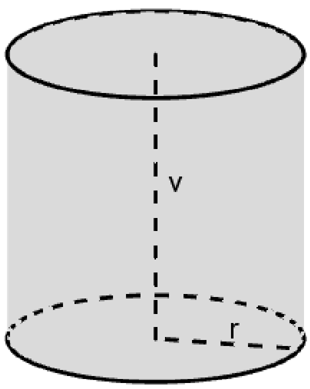
Jehlan



Objem: $V = \dfrac{1}{3} S_p v$

Povrch: $S = S_p + S_{pl}$

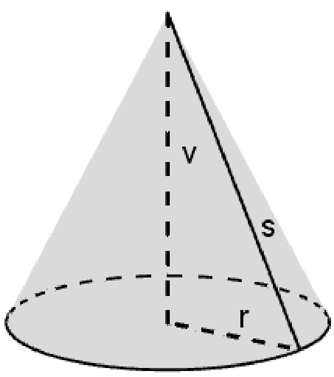
Válec



Objem: $V = \pi\, r^2\, v$

Povrch: $S = 2S_p + s_{pl} = 2\pi\, r\,(r + v)$

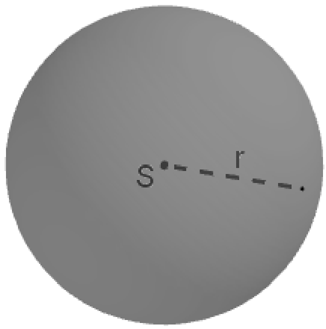
Kužel



Objem: $V = \dfrac{1}{3}\pi\, r^2\, v$

Povrch: $S = \pi\, r^2 + \pi\, r\, s = \pi\, r\,(r + s)$

Koule



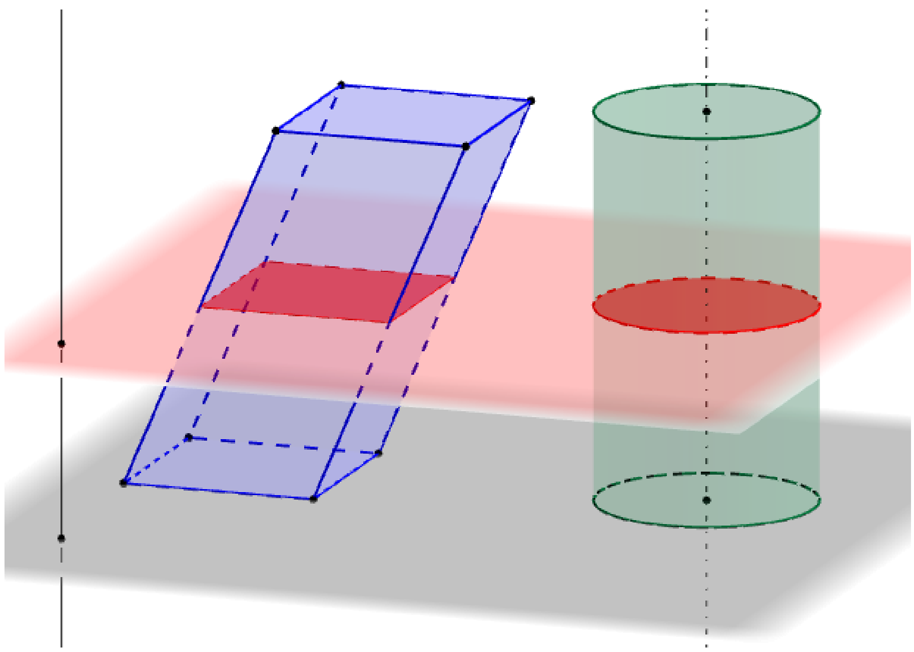
Objem: $V = \dfrac{4}{3}\pi\, r^3$

Povrch: $S = 4\pi\, r^2$

11 Cavalieriho princip

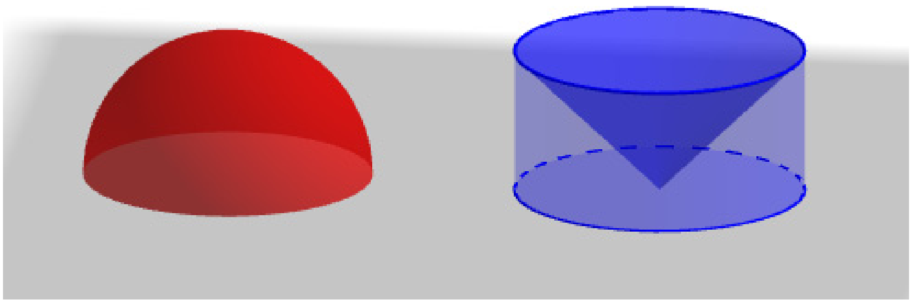
Bonaventura Cavalieri, 1598–1647, italský matematik.

Pro výpočet objemu některých dalších těles (např. kosého hranolu) můžeme využít tzv. *Cavalieriho princip*: *Jestliže pro dvě tělesa existuje taková rovina, že každá s ní rovnoběžná rovina protíná obě tělesa v rovinných útvarech o témže obsahu, pak mají obě tělesa stejný objem, viz Obr. 66.*



Obrázek 66: Cavalieriho princip (jako dynamický aplet najdete tento obrázek na adrese https://www.geogebra.org/m/nEBFuYXP)

PŘÍKLAD 11.1. *Na Obr. 67 jsou dvě tělesa s podstavami v téže rovině: polokoule o poloměru r a válec o poloměru i výšce r, z něhož je odebrán* *kužel o poloměru i výšce r (jeho podstava je totožná s horní podstavou válce a vrcholem je střed dolní podstavy válce). Užitím Cavalieriho principu ukažte, že obě tělesa mají stejný objem $V = \frac{2}{3}\pi r^3$.*



Obrázek 67: Cavalieriho princip: Obě tělesa mají stejný objem