13 Shodná zobrazení v rovině

Definice 3 (Shodné zobrazení)**.** *Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům* X, Y *přiřazuje body* X', Y' *tak, že*

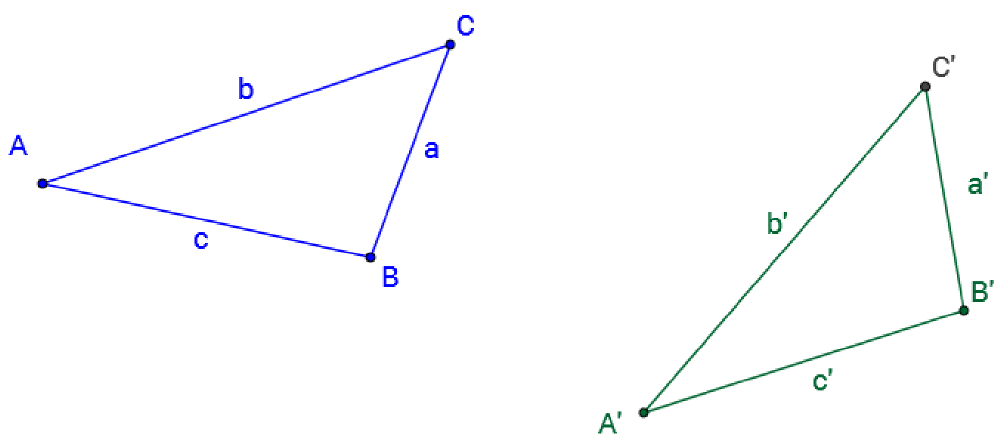
$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá shodné zobrazení v rovině (též izometrické zobrazení).

Zjednodušeně říkáme, že *shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů.* Vzdálenost bodů je tedy *invariantem* shodného zobrazení.

Jak poznáme shodné útvary ?

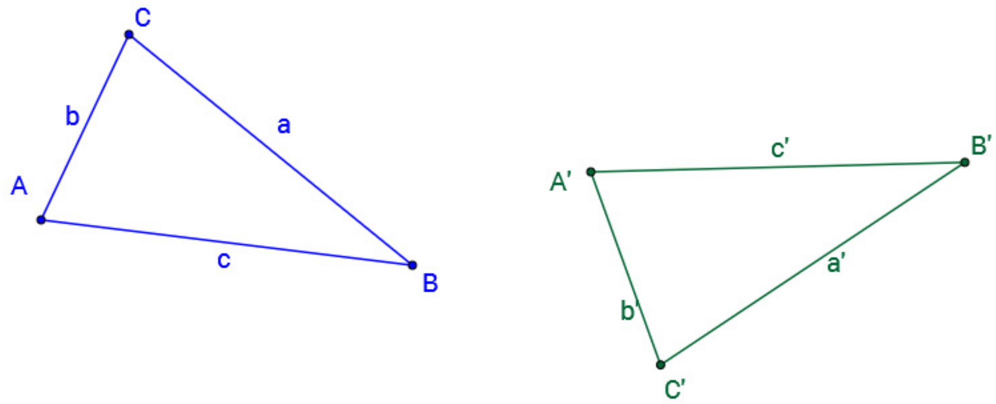
Shodnost přímá: Po přemístění v rámci roviny se útvary kryjí, viz Obr. 80.



Obrázek 80: Shodnost přímá

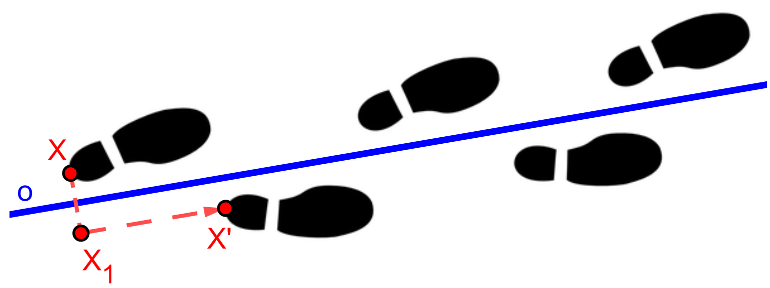
Přímými shodnostmi v rovině jsou *středová souměrnost*, *otočení*, *posunutí* a *identita*.

Shodnost nepřímá: Po žádném přemístění v rámci roviny se útvary nekryjí, jeden z nich je třeba ještě „převrátit“ (tj. vypomoci si manipulací v trojrozměrném prostoru), viz Obr. 81.



Obrázek 81: Shodnost nepřímá

Nepřímými shodnostmi v rovině jsou *osová souměrnost* a *posunuté zrcadlení*.



Obrázek 82: Posunuté zrcadlení

13.1 Vlastnosti shodných zobrazení

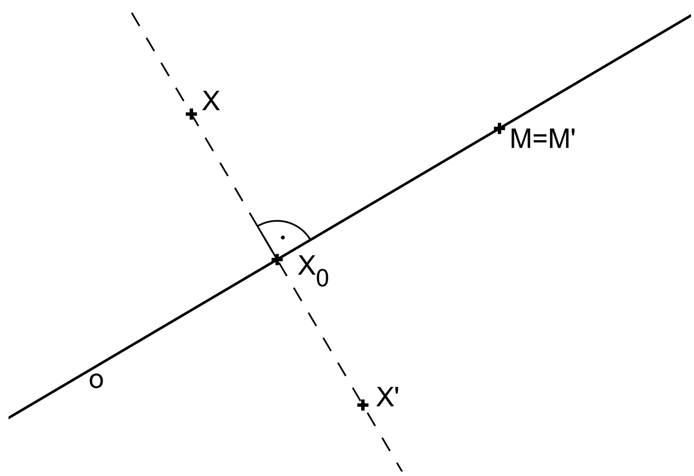
- Každé shodné zobrazení je prosté.
- Úsečka se zobrazí na úsečku.
- Polopřímka se zobrazí na polopřímku.

- Přímka se zobrazí na přímku.
- Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
- Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
- Polorovina se zobrazí na polorovinu.

13.2 Osová souměrnost

Obrázek 83: Osová souměrnost (zrcadlení)

Definice 4. *Nechť je dána přímka o, kterou nazýváme* **osa souměrnosti.** *Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X, který neleží na přímce o, sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0. Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme* **osová souměrnost s osou** *o a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.*

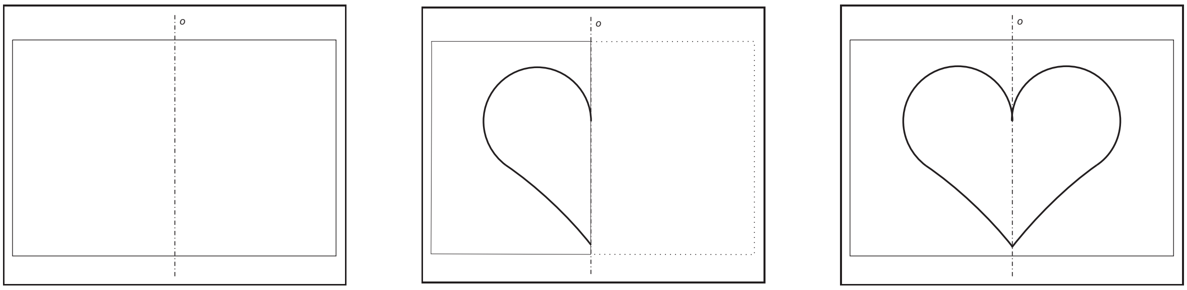


Obrázek 84: Definice osové souměrnosti

Poznámky:

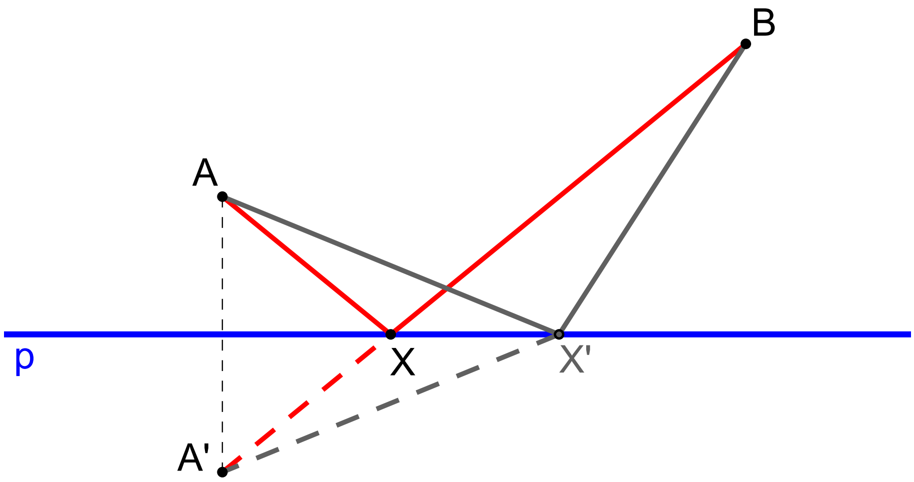
1. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodu souměrně sdružených podle osy o.
2. Osová souměrnost je příkladem *involutorního zobrazení* (též *involuce*).

Příkladem uplatnění osové souměrnosti, se kterým se většina z nás setkala, je postup při „výrobě“ papírového srdce co nejdokonalejšího tvaru (viz Obr. 85). Z papíru přeloženého napůl vystřihneme polovinu srdce, která se po rozevření papíru „zobrazí“ v osové souměrnosti kolem osy přeložení.



Obrázek 85: Osová souměrnost v praxi

PŘÍKLAD 13.1. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Najdete všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*



Obrázek 86: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 86

Samodružné body, přímky a směry osové souměrnosti[8]

Všechny *samodružné body* osové souměrnosti vyplňují osu souměrnosti o. Říkáme, že osa o je *přímkou samodružných bodů* osové souměrnosti.

Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.

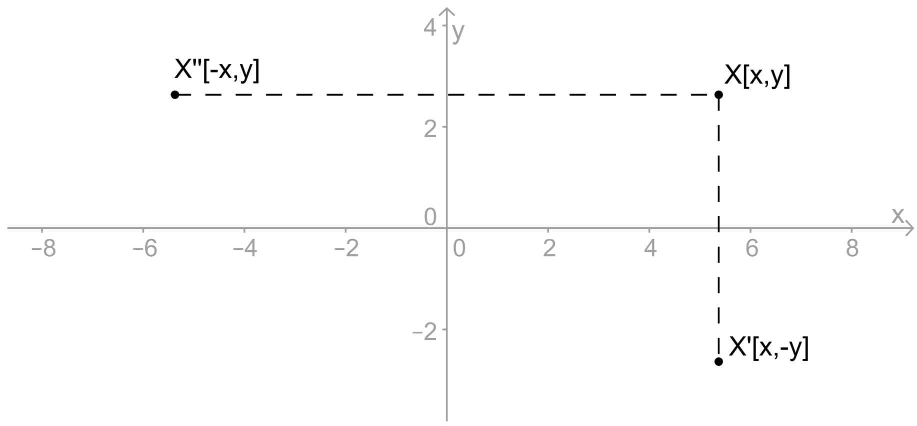
Osová souměrnost má dva *samodružné* směry, (1) směr kolmý na osu souměrnosti a (2) směr rovnoběžný s osou souměrnosti.

[8]Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Tato skutečnost se využívá ke klasifikaci shodností.

Analytické vyjádření osové souměrnosti O(o) v rovině

PŘÍKLAD 13.2. *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y).*

Řešení: Dle obrázku 87 je zřejmé, že uvedené osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření[9].



Obrázek 87: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y)

Osová souměrnost s osou x:

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

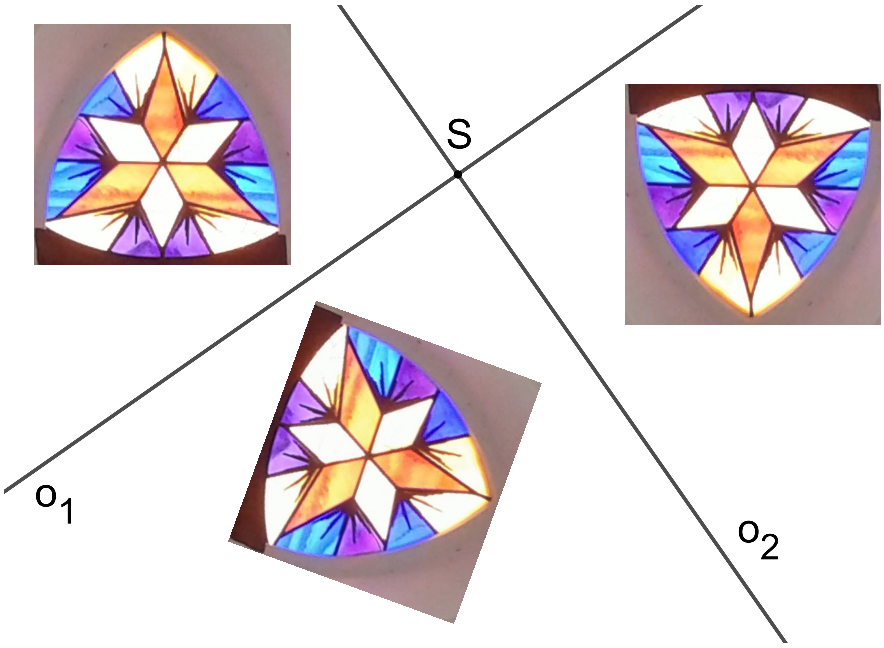
Osová souměrnost s osou y:

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

[9]Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Osová $\mathcal{O}(o)$ souměrnost podle osy o dané rovnicí $o : ax + by + c = 0$ má potom takovéto parametrické rovnice

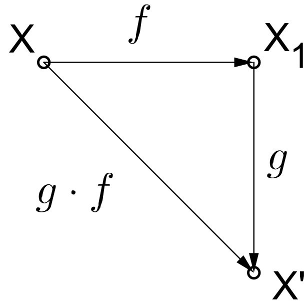
$$x' = x - \frac{2a}{a^2+b^2}(ax+by+c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2+b^2}(ax+by+c)$$

13.3 Skládání zobrazení



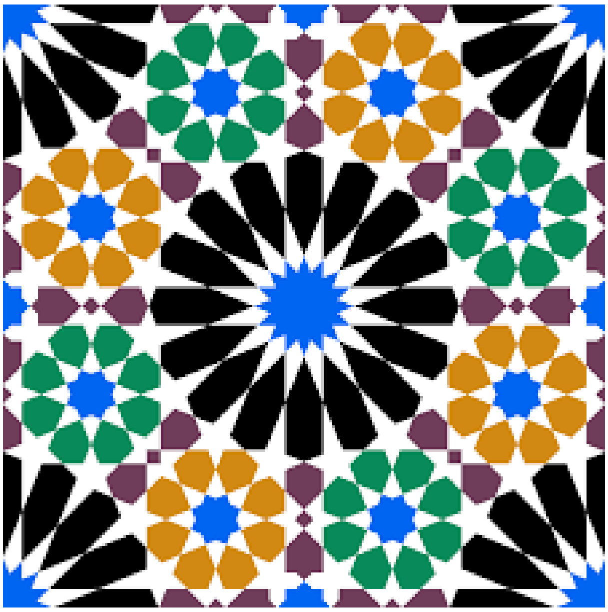
Obrázek 88: Složení dvou osových souměrností s kolmými osami

Definice 5 (Skládání zobrazení)**.** *Nechť* f, g *jsou dvě zobrazení, viz Obr. 89. Jestliže bod* X_1 *je obrazem bodu* X *v zobrazení* f *(tj.* $X_1 = f(X)$*) a bod* X' *je obrazem bodu* X_1 *v zobrazení* g *(tj.* $X' = g(X_1)$*), potom je každému bodu* X *přiřazen bod* $X' = g(f(X))$*. Tím je definováno zobrazení* h *přiřazující bodu* X *bod* $X' = g(f(X))$ *o kterém říkáme, že vzniklo složením zobrazení* f *a* g*. Zapisujeme* $h = g \cdot f$*,* $h = gf$*,* $h = g \circ f$ *nebo* $h = g(f(X))$*.*



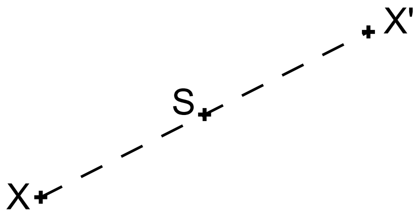
Obrázek 89: Skládání zobrazení f a g

13.4 Středová souměrnost



Obrázek 90: Alhambra, kachel (`https://openclipart.org/detail/224123/alhambra-tile`)

Definice 6. Středová souměrnost *se středem S je shodné zobrazení, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že bod S' je středem úsečky XX'. Zobrazení značíme $\mathcal{S}(S)$.*



Obrázek 91: Středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$

Poznámka. Středová souměrnost je jednoznačně určena svým středem. Můžeme ji chápat též jako speciální případ rotace $\mathbf{R}(S, \alpha)$ pro $\alpha = 180°$, tj. $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, 180°)$.

Středová souměrnost vznikne *složením* libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé (střed souměrnosti S odpovídá průsečíku těchto os), viz Obr. 90, a naopak, lze ji *rozložit* na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S, přitom jedna z os je volitelná.

Středová souměrnost je *přímá shodnost* a *involuce* (*involutorní zobrazení*).

Samodružné body, přímky a směry středové souměrnosti

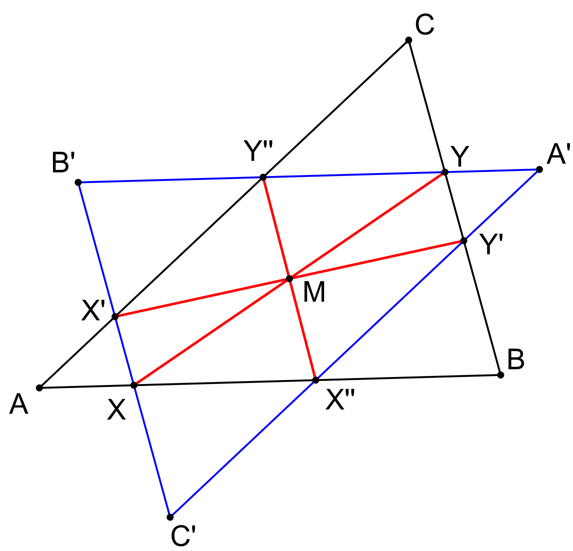
Středová souměrnost má *jediný samodružný bod*, střed S, a *všechny směry samodružné*. Obrazem každé přímky je přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem S je *samodružná přímka*.

Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$x' = -x + 2s_1$$
$$y' = -y + 2s_2$$

PŘÍKLAD 13.3. *Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitrní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.*

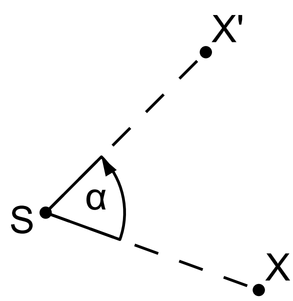


Obrázek 92: Řešení příkladu 13.3

13.5 Otočení

Obrázek 93: Rotační symetrie

Definice 7. Otočení *(též* **rotace***) je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti φ, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ. Zobrazení značíme $\mathcal{R}(S, \varphi)$, bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti φ je úhel otočení.*



Obrázek 94: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$

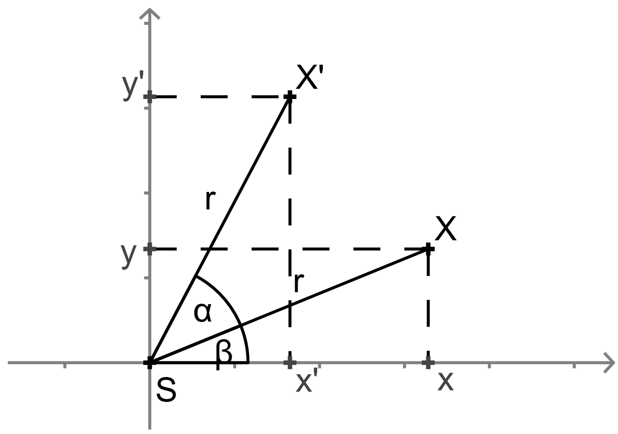
Otočení lze vytvořit *složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami*. Jeho středem je průsečík těchto os. Naopak, každé otočení lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou různoběžné a procházejí středem otočení. Jednu z těchto os lze při tom volit libovolně tak, aby procházela středem otočení. Druhá je pak touto volbou určena jednoznačně.

Samodružné body a směry otočení

Otočení má *jediný samodružný bod*, je jím střed otočení. Nemá *žádný samodružný směr*.

PŘÍKLAD 13.4. *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel* α*.*

Řešení: Postupujeme podle obrázku 95.



Obrázek 95: Otočení $\mathcal{R}([0,0],\alpha)$

Rovnice otočení o úhel α kolem počátku[10] jsou

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

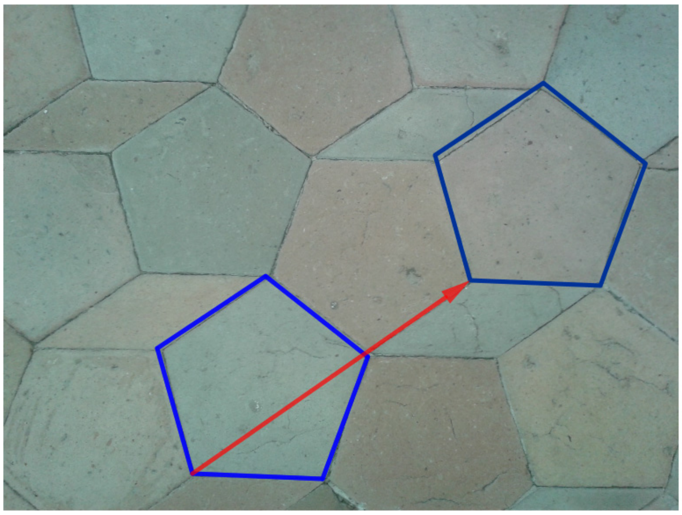
Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α.

PŘÍKLAD 13.5. *Jsou dány různé rovnoběžné přímky* a, b, c *a bod* A*, který leží na přímce* a*. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky* ABC*, jejichž vrcholy* B, C *leží po řadě na přímkách* b, c*.*

[10] *Analytické vyjádření otočení (rotace)* $\mathbf{R}(S,\alpha)$ *se středem* $S[s_1, s_2]$

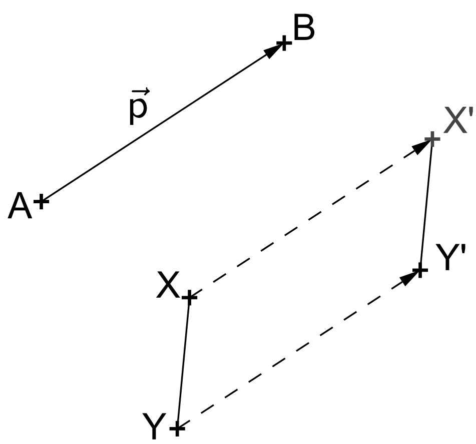
$$x' = (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1$$
$$y' = (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2$$

13.6 Posunutí (Translace)



Obrázek 96: Posunutí

Definice 8. *Orientovanou úsečkou AB je dán vektor $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$.* **Posunutí** *(též* **translace***) je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$, tj. $X' = X + \vec{p}$. Zobrazení značíme $\mathcal{T}(\vec{p})$.*



Obrázek 97: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$

Posunutí (též *translaci*) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je potom kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

Naopak, každou translaci lze rozložit na dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami, z nichž jednu lze volit libovolné, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.

Samodružné body, směry a přímky posunutí

Posunutí (translace) nemá *žádný samodružný bod* a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné, tj. má *všechny směry samodružné*. Samodružnými přímkami jsou *přímky rovnoběžné se směrem posunutí*.

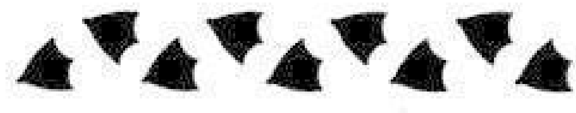
Analytické vyjádření posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině

Rovnice posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$, kde $\vec{p} = (p_1, p_2)$:

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$

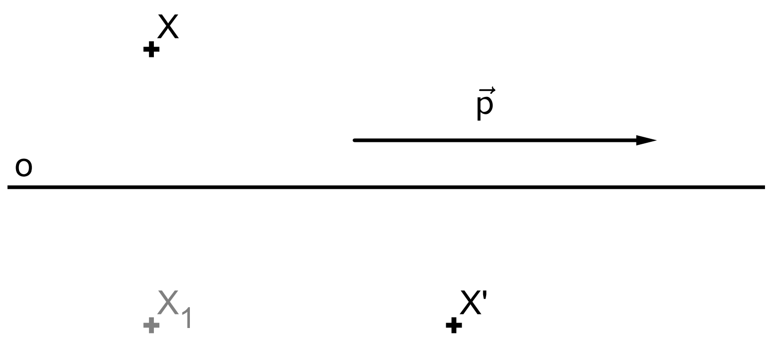
PŘÍKLAD 13.6. *Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran* a, b, c, d. [1]

13.7 Posunuté zrcadlení (Posunutá souměrnost)



Obrázek 98: Kachní stopy - otisky levé a pravé nohy jsou ve vztahu posunutého zrcadlení

Definice 9. *Zobrazení složené z posunutí ve směru dané přímky o a osové souměrnosti podle osy o se nazývá posunuté zrcadlení (též posunutá souměrnost).*

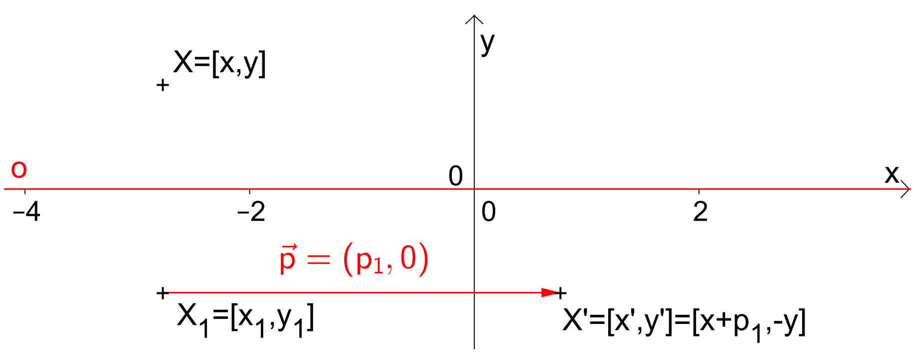


Obrázek 99: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : X \to X'$

Samodružné body, směry a přímky

Posunuté zrcadlení *nemá samodružné body.* Samodružnou přímkou tohoto zobrazení je osa o. Samodružné směry jsou dva na sebe kolmé směry, směr kolmý na osu a směr rovnoběžný s osou.

Analytické vyjádření posunutého zrcadlení



Obrázek 100: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : X \to X'$

Posunuté zrcadlení dané osou souměrnosti v ose x a vektorem posunutí $\vec{p} = (p_1, 0)$ (viz Obr. 100)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}:\ x' &= x + p_1, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$