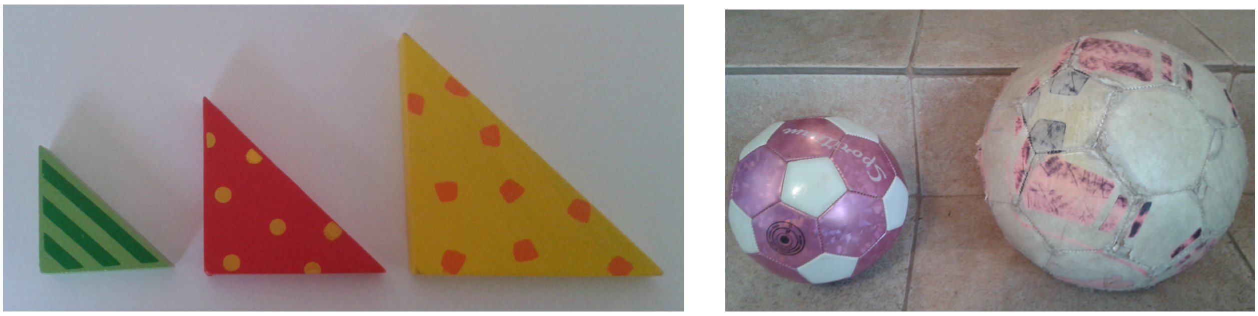
14 Podobná zobrazení



Obrázek 101: Podobné útvary

Definice 10. *[Podobné zobrazení] Geometrické zobrazení f se nazývá „podobné zobrazení“, jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y uvažovaného prostoru (v našem případě se bude jednat převážně o rovinu) a jejich obrazy X', Y' platí:*

$$|X'Y'| = k|XY|. \tag{7}$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f.

Poznámka. Podobná zobrazení, u nichž vzory i obrazy patří do téhož prostoru, např. roviny, nazýváme *podobné transformace roviny* zkráceně *podobnosti.* Potom hovoříme např. o *podobnostech v rovině*[11] nebo o *podobnostech v trojrozměrném prostoru.*

Vlastní podobnosti

Podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme *vlastní podobnosti.*

Platí toto tvrzení: *Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.* Jeho důkaz se provádí většinou ve dvou krocích. Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem $k \in R^+ - \{1\}$) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň

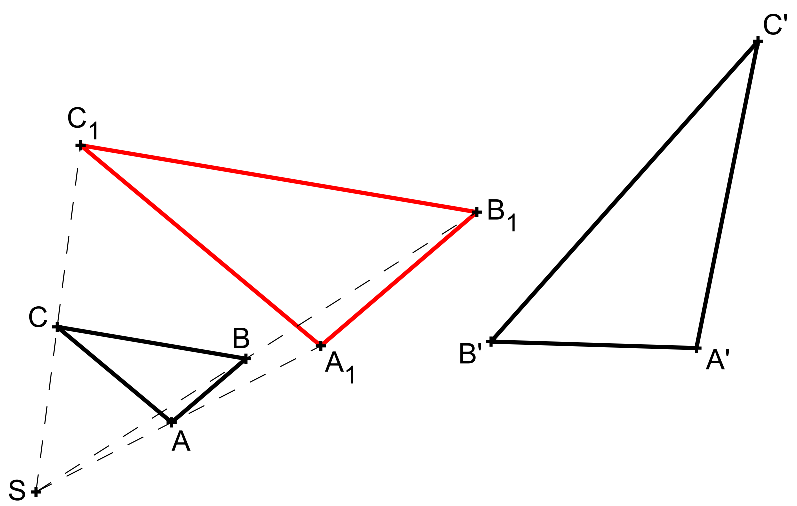
[11] Můžeme také rovnou definovat tyto *podobné transformace roviny*, tj. *podobnosti v rovině*, takto:
Definice (Podobnost) Zobrazení f roviny (eukleidovského prostoru E_2) na sebe se nazývá „podobnou transformací roviny“ (též „podobností v rovině“), jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = k|XY|$. Číslo k se nazývá koeficient podobnosti f.

jeden. Dohromady nám tedy vyjde, že vlastní podobnost musí mít právě jeden samodružný bod.

PŘÍKLAD 14.1. *Pokuste se najít argumenty pro výše uvedené tvrzení, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod*

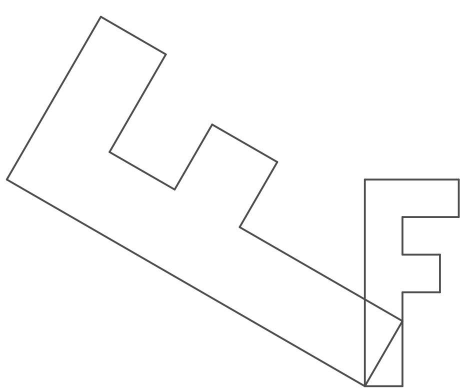
Podobnosti v rovině jako složená zobrazení

Každé podobné zobrazení lze složit ze *stejnolehlosti*[12] a *shodného zobrazení*, viz Obr. 102.



Obrázek 102: Každou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a shodnost

PŘÍKLAD 14.2. *Pokuste se popsat stejnolehlost a shodnost, jejichž složením vznikne podobnost zachycená na Obr. 103.*



Obrázek 103: Podobné zobrazení v rovine

[12] O stejnolehlosti pojednává kapitola 15 začínající na str. 84

PŘÍKLAD 14.3. *Víte v jakém vztahu jsou papíry různých velikostí formátu A? Jsou vzájemně podobné?*

PŘÍKLAD 14.4. *V eukleidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C. Rozložte toto podobné zobrazení na stejnolehlost a shodné zobrazení.*

PŘÍKLAD 14.5. *Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| : |AC| = 3 : 5$, $\alpha = 60°$, $\rho = 1,8\,cm$ (poloměr kružnice vepsané).*

PŘÍKLAD 14.6. *Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABD| = \varepsilon$, $|AC| = e$.*

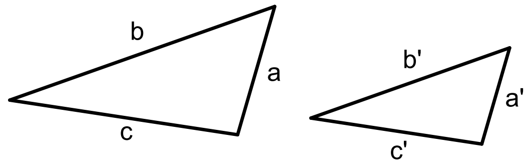
PŘÍKLAD 14.7. *Jsou krabice na Obr. 104 geometricky podobné?*

Obrázek 104: Jsou vzájemně podobné (z hlediska geometrického)?

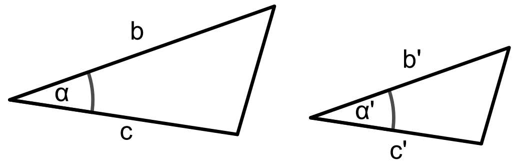
14.1 Věty o podobnosti trojúhelníků

Dva trojúhelníky jsou *podobné*, jestliže mají stejné poměry délek sobě odpovídajících si stran a stejné velikosti sobě odpovídajících vnitřních úhlů.

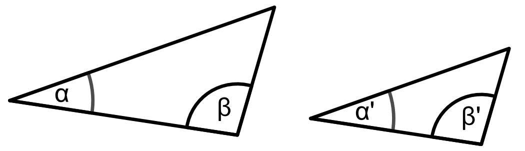
Pro identifikaci dvojice podobných trojúhelníků lze dle situace použít několik kritérií, která jsou známa jako *věty o podobnosti trojúhelníků*: *sss*, *sus*, *uu*, *Ssu*, viz Obr. 105–108



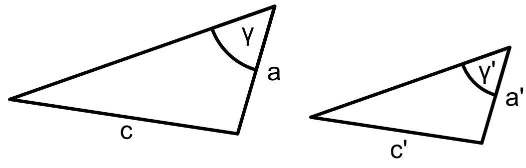
Obrázek 105: *sss*: $a'/a = b'/b = c'/c$



Obrázek 106: *sus*: $b'/b = c'/c$, $\alpha = \alpha'$

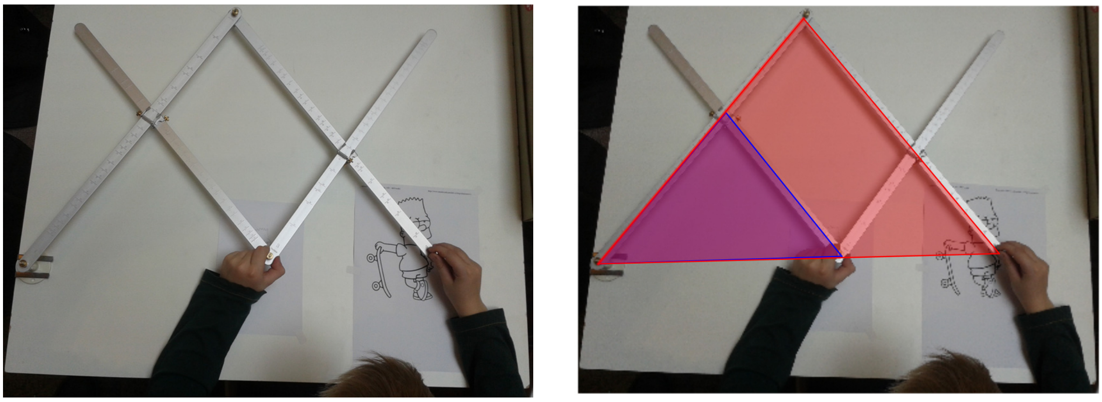


Obrázek 107: *uu*: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$



Obrázek 108: *Ssu*: $c > a$, $a'/a = c'/c$, $\gamma = \gamma'$

15 Stejnolehlost



Obrázek 109: Pantograf – mechanická realizace stejnolehlosti

Stejnolehlost patří mezi tzv. *homotetie*[13], tj. zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

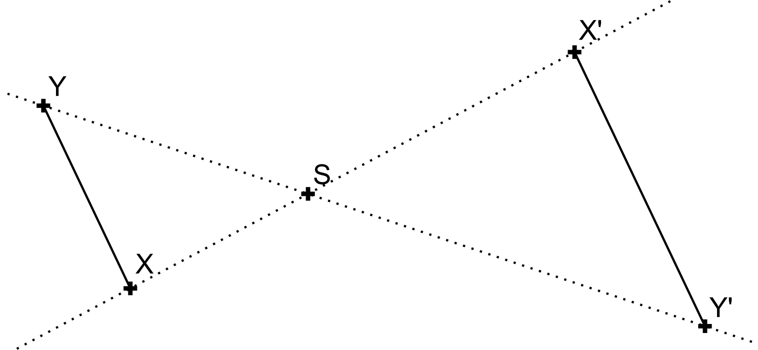
Definice 11 (Stejnolehlost)**.** *Budiž dán bod S a reálné císlo κ (různé od* 0 *a* 1*). Stejnolehlost* $\mathrm{H}(S;\kappa)$ *se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:*

1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,

2. Pro $X \not\equiv S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,

pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce $\overrightarrow{SX}$ a

pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k $\overrightarrow{SX}$.



Obrázek 110: Stejnolehlost $H(S, \kappa = -1.5)$

[13] Anglicky je stejnolehlost *homothety*, též *dilation*, viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Homothetic_transformation` Působení stejnolehlosti na trojúhelník si vyzkoušejte pomocí apletu `https://www.geogebra.org/m/arUb8mt6`

Poznámka. Zobrazení inverzní k stejnolehlosti $\mathrm{H}(S;\kappa)$ je stejnolehlost se stejným středem S, ale s opačným koeficientem $\dfrac{1}{\kappa}$, tj. $\mathrm{H}^{-1}\left(S;\dfrac{1}{\kappa}\right)$.

Vlastnosti stejnolehlosti $H(S,\kappa)$:

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.

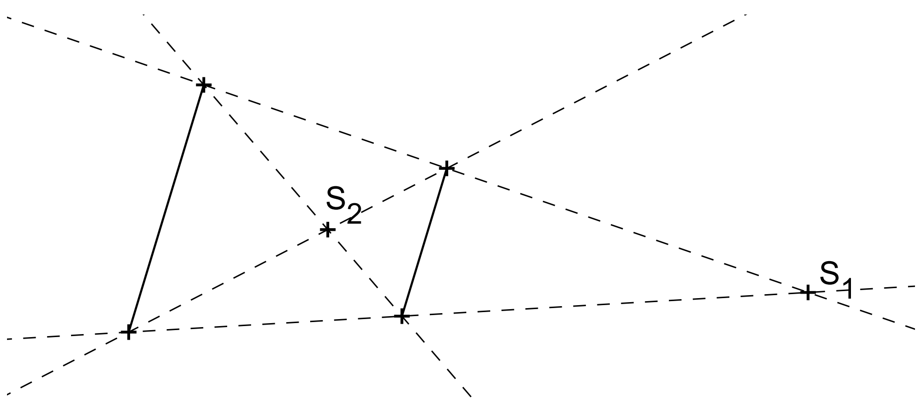
2. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$; $\quad |A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.

3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná .

4. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $\quad |\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

PŘÍKLAD 15.1. *Jsou dány dvě vzájemně rovnoběžné úsečky různých délek. Určete středy stejnolehlostí, v nichž se jedna z nich zobrazuje na druhou.*

Řešení viz Obr. 111.



Obrázek 111: Středy stejnolehlostí dvou rovnoběžných úseček

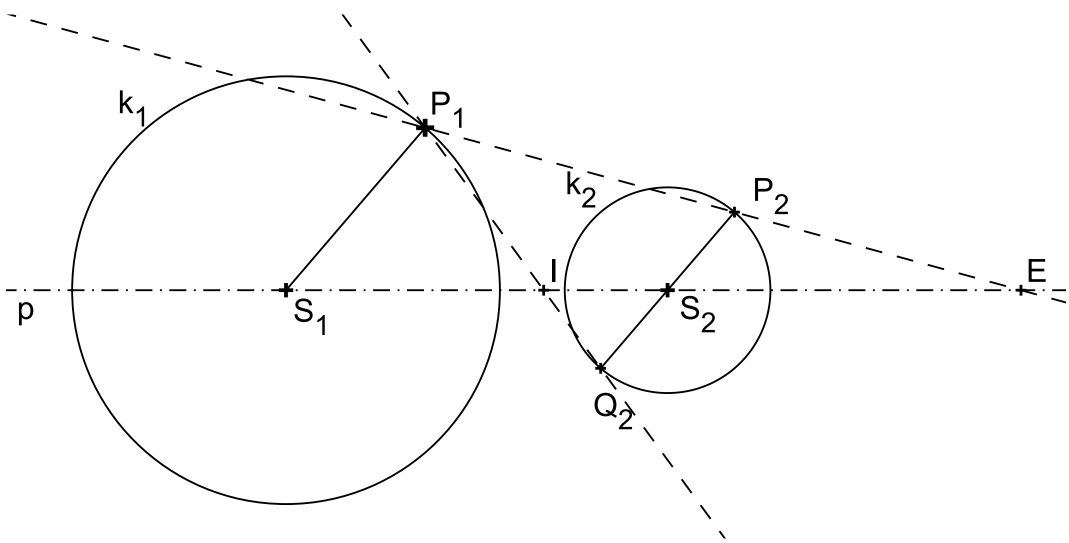
PŘÍKLAD 15.2. *Uvažujte variantu předchozího příkladu 15.1, v níž jsou dané úsečky v jedné přímce, viz Obr. 112*

Řešení viz `https://www.geogebra.org/m/qSQGSZeP`

Obrázek 112: Jak určit středy stejnolehlostí dvou kolineárních úseček?

15.1 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2: $\mathrm{H}_1(E, r_2/r_1)$ a $\mathrm{H}_2(I, -r_2/r_1)$ (Bod E se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod I potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T, je $T = I$ v případě vnějšího dotyku a $T = E$ v případě vnitřního dotyku kružnic.



Obrázek 113: Stejnolehlost kružnic

PŘÍKLAD 15.3. *Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ s různými středy a poloměry. Sestrojte jejich společné tečny.*

PŘÍKLAD 15.4. *Do půlkruhu s průměrem AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB a další dva vrcholy M, N na dané půlkružnici.*

PŘÍKLAD 15.5. *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:*

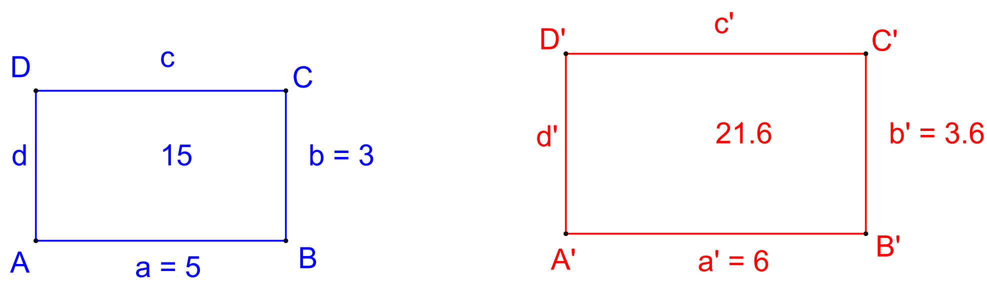
a) $v_a = 5cm$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$, *b)* α, β, v_c,

c) α, β, t_c,

d) $a : b = 3 : 5$, $\gamma = 60°$, $t_c = 6cm$.

15.2 Koeficienty lineárního a plošného zvětšení (zmenšení)

Podobnost je charakterizována *koeficientem podobnosti* k, viz Def. 10. Jeho hodnota vyjadřuje poměr mezi lineárními (délkovými) rozměry obrazu a jim odpovídajícími rozměry vzoru. Tuto roli plní též tzv. *koeficient lineárního zvětšení (zmenšení)* k_l (potom platí $k_l = k$). Poměr obsahu obrazu a jeho vzoru ve stejné podobnosti je potom dán hodnotou tzv. *koeficientu plošného zvětšení (zmenšení)* k_p, pro který platí $k_p = k_l^2$.



Obrázek 114: Určete koeficienty k_l a k_p transformace obdélníku $ABCD$ na $A'B'C'D'$

PŘÍKLAD 15.6. *Obdélník* $ABCD$ *má strany délek* $a = 5$ *cm a* $b = 3$ *cm, obdélník* $A'B'C'D'$ *má strany* $a' = 6$ *cm a* $b' = 3,6$ *cm. Zdůvodněte, že jsou tyto obdélníky podobné. Uvažujeme-li, že obdélník* $A'B'C'D'$ *vznikl z trojúhelníku* $ABCD$*, určete příslušné hodnoty* k_l *a* k_p.

PŘÍKLAD 15.7. *Kolikrát se zvětší obsah kruhu, zvětšíme-li jeho průměr třikrát?*

PŘÍKLAD 15.8. *Pravoúhlý trojúhelník se stranami délek* $5, 12$ *a* 13 *cm byl zobrazen v podobnosti s koeficientem plošného zmenšení* $0,25$*. Určete délky stran jeho obrazu.*