4 Projektivní rozšíření $\bar{E}_n$ prostoru E_n

Projektivním rozšířením euklidovského prostoru prostoru E_n rozumíme jeho doplnění o **nevlastní body**. Výsledný prostor značíme $\bar{E}_n$. Takovéto rozšíření euklidovského prostoru nám podstatně zjednodušuje popis a zkoumání některých geometrických vztahů. Využívá se třeba při výkladu perspektivy, zavádění kolineace nebo při zkoumání kuželoseček a kvadrik.

4.1 Projektivní rozšíření roviny E_2

Je možné zajistit, aby každé dvě přímky v rovině měly alespoň jeden společný bod?

Ano. Řešením je doplnění roviny o nevlastní body N_∞ a v důsledku toho i o nevlastní přímku n_∞, která je jimi tvořena.

Prvotní představa o nevlastním bodu přímky je taková, že je to bod této přímky, který leží v nekonečnu. Proto je logické, že **nevlastní bod přímky ztotožňujeme s jejím směrem**.

DEFINICE 18. *Je-li $\vec{a}$ libovolný nenulový vektor, potom množinu všech vektorů $\alpha\vec{a}, \alpha \in R$ nazýváme* **směrem**. *Značíme $\langle\vec{a}\rangle$ a libovolný vektor daného směru nazýváme* **reprezentantem** *tohoto směru.*

Potom můžeme projektivně rozšířený prostor $\bar{E}_2$ chápat jako sjednocení euklidovského prostoru E_2 s množinou všech směrů $\langle V_2\rangle$, tj. s množinou všech nevlastních bodů N_∞:

$$\bar{E}_2 = E_2 \cup N_\infty = E_2 \cup \langle V_2\rangle.$$

Poznámka. Každá vlastní přímka má právě jeden nevlastní bod.

4.1.1 Homogenní souřadnice v $\bar{E}_2$

Homogenní souřadnice v $\bar{E}_2$ jsou výsledkem projektivního rozšíření, to jest ztotožnění vlastních i nevlastních bodů prostoru $\bar{E}_2$ se směry $\langle V_3\rangle$ prostoru E_3. Souřadnice vektoru z V_3, který ukazuje na konkrétní bod prostoru $\bar{E}_2$ potom nazýváme **aritmetickým zástupcem** tohoto bodu.

Poznámka. Bavíme se vlastně o speciálním případě homogenních souřadnic - o „afinních homogenních souřadnicích". Ty nám způsobem svého zavedení umožňují v případě vlastních bodů přejít k afinním (nebo přímo kartézským) souřadnicím v $\bar{E}_n$. V případě nevlastních bodů pak k souřadnicím příslušných směrových vektorů ve $\bar{V}_n$. Pro zjednodušení však budeme nadále používat pro tento typ souřadnic vesměs označení „homogenní souřadnice".

Homogenní souřadnice:

Vlastní bod $X \in \bar{E}_2$:

$$X = \langle h_0, h_1, h_2\rangle = \left\langle 1, \frac{h_1}{h_0}, \frac{h_2}{h_0}\right\rangle = \langle 1, x_1, x_2\rangle$$

Nevlastní bod (směr) $Z \in \bar{E}_2$:

$$Z = \langle 0, z_1, z_2\rangle$$

Potom
$\langle x_1, x_2\rangle$ jsou afinní (nebo rovnou kartézské) souřadnice bodu X v E_2,

$\langle z_1, z_2\rangle$ jsou afinní (nebo rovnou kartézské) souřadnice směrového vektoru $\vec{z}$ ve V_2.

4.1.2 Přímka v $\bar{E}_2$

PŘÍKLAD 4.1. *V rovině E_2 je dána přímka $2x + 5y + 7 = 0$. Vypočtěte (afinní) homogenní souřadnice jejího nevlastního bodu.*

PŘÍKLAD 4.2. *V rovině $\bar{E}_2$ jsou dány body $A = \langle 0, 3, 2\rangle$, $B = \langle 2, 8, 2\rangle$. Napište rovnici přímky AB.*

Různé způsoby vyjádření přímky v $\bar{E}_2$:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

$$X = \alpha \cdot A + \beta \cdot B,$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

PŘÍKLAD 4.3. *V rovině $\bar{E}_2$ je $A = \langle 1, 2, 0\rangle$, $B = \langle 1, 1, -1\rangle$, $C = \langle 0, 1, 0\rangle$, $D = \langle 1, 0, -3\rangle$. Určete souřadnice průsečíku přímek AB a CD.*

4.1.3 Kuželosečky v $\bar{E}_2$

PŘÍKLAD 4.4. *V rovině E_2 je dána kuželosečka $x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 4y + 2 = 0$. Vypočtěte její nevlastní body v $\bar{E}_2$.*

4.2 Zobecnění

Myšlenku projektivního rozšíření roviny můžeme zobecnit na prostor dimenze n. Výsledný prostor nazýváme projektivní prostor P_n a lze ho ztotožnit s množinou směrů $\langle V_{n+1}\rangle$:

$$P_n = \bar{E}_n = \langle V_{n+1}\rangle$$

(Afinní) Homogenní souřadnice: $X = \langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle$

PŘÍKLAD 4.5. *Napište rovnici roviny, která prochází body $A = \langle 2, -1, 1, 2\rangle, B = \langle 1, 0, 0, -1\rangle, C = \langle 3, 2, 2, -3\rangle$.*

PŘÍKLAD 4.6. *V prostoru $\bar{A}_3$ určete průsečík P přímky AB s rovinou CDE; $A = \langle 1, 0, 1, 0\rangle, B = \langle 0, -1, 1, 2\rangle, C = \langle 1, 0, 0, 0\rangle, D = \langle 1, 2, 0, 1\rangle, E = \langle 1, 0, 2, -5\rangle$.*

4.3 Úlohy

1. V rovině je dána přímka $2x-3y+7 = 0$. Napište její rovnici v příslušných afinních homogenních souřadnicích a vypočtěte její nevlastní bod U.

2. V prostoru $\bar{E}_3$ je přímka popsána v afinních homogenních souřadnicích rovnicemi

$$2x_0 + 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0,$$

$$7x_0 - 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0.$$

Vypočtěte její nevlastní bod U.

3. Napište rovnici roviny, která v prostoru P_3 prochází body $A = \langle 2, -1, 1, 2\rangle, B = \langle 1, 0, 0, -1\rangle, C = \langle 3, 2, 2, -3\rangle$.

4. Každá shodnost může být v homogenních souřadnicích vyjádřena jednou maticí. Pokuste se najít příslušné matice.

5. Určete obrazy bodů $A = [2, 5], B = [-1, 0]$ v rotaci $R(S, \alpha)$; $S = [1, 2], \alpha = \pi/3$. Použijte matici v homogenních souřadnicích.

6. V prostoru $\overline{E}_3$ určete průsečík P přímky AB s rovinou CDE.
$A = (1, 0, 1, 0),\ B = (0, -1, 1, 2),\ C = (1, 0, 0, 0),\ D = (1, 2, 0, 1),\ E = (1, 0, 2, -5)$.

7. Rovnice kuželoseček přepište do homogenních souřadnic a určete jejich nevlastní body.
a) $-x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$,
b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$,
c) $x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x + 1 = 0$.

8. V projektivním prostoru $\overline{P}_4$ najděte společný bod M rovin

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_0 & - & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\
2x_0 & + & x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 10x_4 & = & 0 \\
 & - & 6x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
2x_0 & + & 10x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 0
\end{array}$$