8 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo představuje metodu řešení regulárních soustav lineárních rovnic pomocí determinantů.

Věta 8.1 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť $A \cdot x = b$ je soustava lineárních rovnic, kde A je regulární matice stupně n. Pro každé $j = 1, 2, ..., n$ označme A_j matici, která vznikne z matice A nahrazením $j-$tého sloupce sloupcovým vektorem b pravých stran rovnic dané soustavy. Potom pro každé $j = 1, 2, ..., n$ platí:*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

Důkaz. Nejprve si připomeňme větu o rozvoji determinantu podle $j-$tého sloupce. Plynou z ní tyto vztahy:

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + ... + a_{nj}A_{nk} = 0, \quad \text{pro } k \neq j, \tag{13}$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} = \det A. \tag{14}$$

Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n &= b_i \\
&\ldots\ldots \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n &= b_2
\end{aligned}$$

Obě strany každé rovnice vynásobíme algebraickým doplňkem A_{ij} koeficientu a_{ij} jejího $j-$tého členu $a_{ij}x_j$:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \quad / \cdot A_{1j} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \quad / \cdot A_{2j} \\
&...... \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n &= b_i \quad / \cdot A_{ij} \\
&...... \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{nn}x_n &= b_n \quad / \cdot A_{nj}
\end{aligned}$$

Nakonec všechny rovnice sečteme. Po aplikaci vztahů (13), (14) na levou stranu tohoto součtu dostaneme postupně:

$$a_{1j}A_{1j}x_j + a_{2j}A_{2j}x_j + ... + a_{nj}A_{nj}x_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}$$

$$x_j \det A = \det A_j,$$

kde A_j je matice, která vznikne z matice A nahrazením jejího $j-$tého sloupce sloupcovým vektorem b pravých stran rovnic soustavy. $\square$

Příklad 46. *Je dána soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých:*

$$\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1
\end{aligned}$$

Užitím Cramerova pravidla určete hodnotu neznámé x_3.

9 Inverzní matice

Příklad 47. *Řešte maticovou rovnici*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Návod:

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot B &= C \\ X &= A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

9.1 Výpočet inverzní matice užitím eliminace

Metoda výpočtu inverzní matice užitím Gaussovy-Jordanovy eliminace je podrobně popsána na straně 26

9.2 Výpočet inverzní matice užitím adjungované matice

Definice 9.1 (Adjungovaná matice)**.** *Adjungovanou maticí k matici A rozumíme transponovanou matici doplňků prvků matice A. Matici doplňků dostaneme tak, že v matici A nahradíme každý prvek jeho algebraickým doplňkem.*

Poznámka. Adjungovanou matici k matici A značíme nejčastěji jedním z těchto způsobů:

$$\overline{A}, \qquad A^A, \qquad \mathrm{adj}A.$$

Příklad 48. *Adjungovaná matice k matici A třetího řádu:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Věta 9.1. *Nechť A je regulární matice. Potom pro inverzní matici A^{-1} k matici A platí tento vztah:*

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}}{\det A}. \tag{15}$$

9.3 Cvičení

1. Řešte užitím Cramerova pravidla:

a) $\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ x + y &= 3, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ 3x - 6y &= 9, \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + 4y &= 5 \\ x + 2y &= 6, \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - 2y &= 1. \end{aligned}$

2. Dokažte platnost vztahu (15). Nejprve pro matici třetího řádu, potom obecně.

3. Pokuste se formulovat algoritmus pro **rychlý výpočet** adjungované matice pro matici **druhého řádu**.

4. Dořešte příklad 47.

5. Vypočtěte matici X:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $X \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$,

c) $X \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 32 & 43 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 13 \\ 19 & 19 & 40 \\ 12 & 10 & 26 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.