1 Lineární algebra

Slovo ALGEBRA pochází z arabského „al-jabr“, což znamená „nahrazení“. Toto slovo se objevilo v názvu knihy

Hisab al-džebr val-muqabala
(„Věda o redukci a vzájemném rušení“)

islámského matematika

Muhammada ibn Músá al-Chvárizmího
(790? - 850?, Chiva, Bagdád),

která je považována za vůbec první knihu o algebře.

Původně se jednalo o nauku o řešení rovnic. Dnešní algebra je daleko abstraktnější. Zabývá se studiem operací na množinách různých prvků a vlastnostmi **struktur**, které takto vznikají. Známými představiteli těchto struktur jsou **grupa** a **těleso**.

Základním rysem algebry je **označení studovaných objektů písmeny**. Tento formalismus navrhl *René Descartes* (1596 - 1650). Písmena ze začátku abecedy $(a, b, c, ...)$ měla reprezentovat libovolná čísla - parametry. Písmena z konce abecedy $(p, q, r, s, t, ..., x, y, z)$ pak měla představovat proměnné hodnoty konkrétních veličin (tlak, teplota, …, souřadnice).

Lineární algebra se zabývá vektory, maticemi, soustavami lineárních rovnic a vektorovými prostory.

2 Vektory

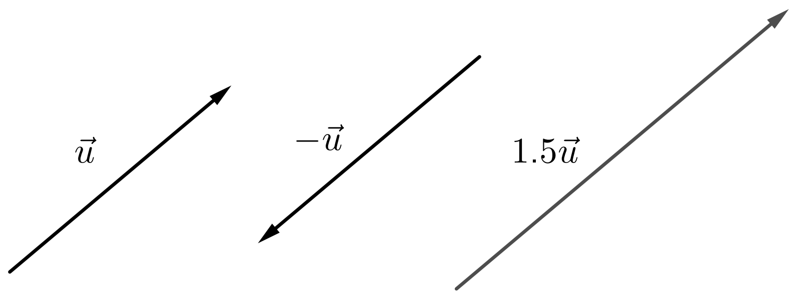
Ze školy znáte *vektory geometrické*, znázorňované orientovanými úsečkami, *vektory aritmetické*, zapisované uspořádanými $n-$ticemi reálných čísel, případně *vektory fyzikální*, vyjadřující velikosti a směry určitých fyzikálních veličin. Jistě také víte, že díky zavedení soustavy souřadnic můžeme mezi těmito dvěma reprezentacemi vektoru přecházet, orientované úsečce přiřadíme uspořádanou $n-$tici a naopak, uspořádané $n-$tici přiřadíme orientovanou úsečku.

V letním semestru se seznámíme s pojetím vektoru jako prvku *vektorového prostoru*, tj. množiny s určitými vlastnostmi. Pro názornou představu a praktické použití je však užitečné vědět, že vektor se používá tam, kde je třeba informovat o *velikosti* a *směru*. Z matematiky tak známe třeba *vektor posunutí* nebo *směrový vektor* přímky, z fyziky pak třeba *vektor síly* (fyzikální veličiny, u kterých kromě velikosti záleží také na směru, nazýváme vektorovými veličinami).

V matematice budeme pracovat s *volnými vektory*, tj. vektory, u kterých nezáleží na jejich umístění. Takový volný vektor potom můžeme definovat jako množinu všech orientovaných úseček stejné velikosti a směru. Tu z nich, kterou použijeme ke znázornění tohoto vektoru, nazýváme *umístěním* tohoto vektoru. Ve fyzice většinou pracujeme s *vázanými vektory*, u kterých záleží na umístění (je přece důležité, v jakém místě působí síla).

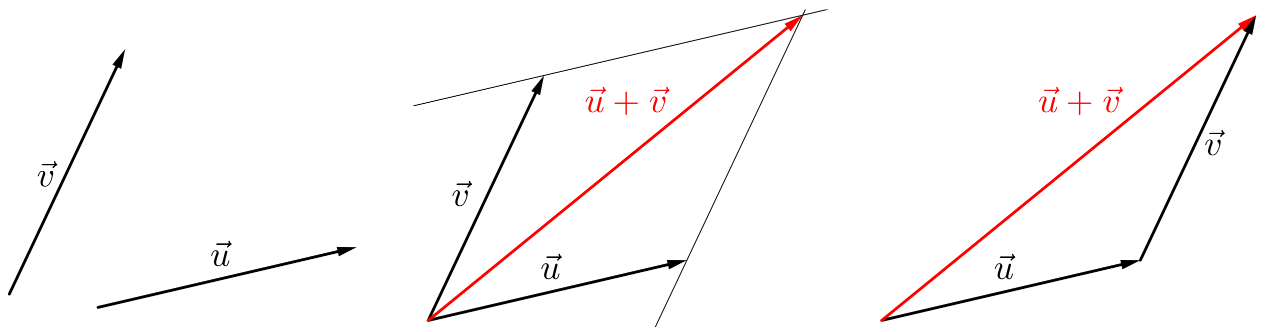
Geometrické vektory

Násobení vektoru skalárem:



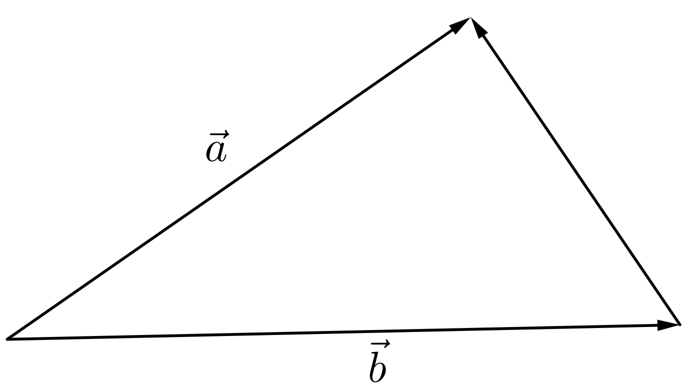
Obrázek 1: Násobení vektoru skalárem

Sčítání vektorů:



Obrázek 2: Sčítání vektorů

Příklad 1. *Vyjádřete nepojmenovaný vektor pomocí vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$.*



Obrázek 3: Zapište třetí vektor

Aritmetické vektory (uspořádané $n-$tice reálných čísel)

Násobení vektoru skalárem:

Aritmetické vektory můžeme násobit reálným číslem tak, že tímto číslem vynásobíme každý prvek vektoru.

$\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$;

$k\vec{u} = (ku_1, ku_2)$, $l\vec{a} = (la_1, la_2, la_3)$ kde $k, l \in \mathbb{R}$

$\vec{a} = (2, -3, 0)$; $5\vec{a} = (10, -15, 0)$

Sčítání vektorů:

Vektory se stejným počtem prvků pak můžeme sčítat tak, že sčítáme sobě odpovídající prvky.

$\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$;

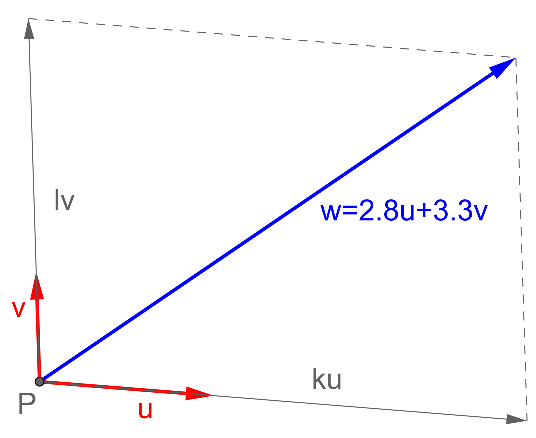
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

$\vec{z} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (-3, 0, -1)$;

$\vec{z} + \vec{w} = (-1, 1, -1)$.

Lineární kombinace vektorů

Spojením násobení vektorů skalárem a sčítání vzniká obecnější operace, *lineární kombinace vektorů.*



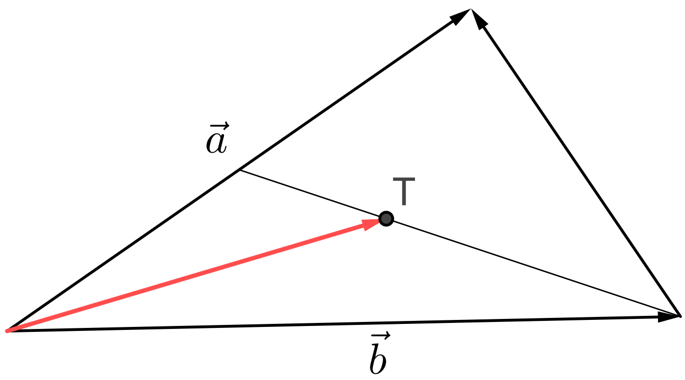
Obrázek 4: Lineární kombinace vektorů

Například, lineární kombinací vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je výraz $k\vec{u} + l\vec{v}$, kde čísla $k, l \in \mathbb{R}$ nazýváme *koeficienty lineární kombinace.*

Máme-li například tři vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o stejném počtu prvků, potom výraz $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$, kde $k, l, m \in \mathbb{R}$, nazýváme *lineární kombinace vektorů* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *s koeficienty* k, l, m. Výsledkem lineární kombinace vektorů je opět vektor.

Příklad 2. *Vytvořte lineární kombinaci* $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$ *pro vektory* $\vec{a} = (-2, 1, 5), \vec{b} = (2, 0, 3), \vec{c} = (1, -3, 9)$ *a koeficienty* $k = -3, l = 2, m = 4$.

Příklad 3. *Pomocí vektorů* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *zapište červený vektor, který směřuje do těžiště trojúhelníku na obrázku 5.*



Obrázek 5: Těžiště

Příklad 4. *Jaké musíme zvolit koeficienty, aby výsledkem lineární kombinace vektorů* $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (5, 3)$ *byl vektor* $\vec{w} = (1, 2)$*?*

3 Matice

Matice vznikly v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic. Pojem „matice“ (angl. matrix) zavedl v roce 1850 anglický matematik *James Joseph Sylvester* (1814–1897). Metoda řešení soustav odpovídající použití matic však byla známa již dlouho před tím[1].

Na řešení soustavy lineárních rovnic vede například úloha nalezení koeficientů *lineární kombinace vektorů*.

Příklad 5. *Určete koeficienty $x, y, z \in R$, pro které platí následující rovnost:* $x(2,0,-1) + y(1,3,5) + z(0,4,3) = (3,9,2)$.

Řešení: Úloha vede na řešení soustavy lineárních rovnice

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 3y + 4z &= 9 \\ -x + 5y + 3z &= 2, \end{aligned}$$

kterou si můžeme schematicky zapsat pomocí tzv. *rozšířené matice soustavy*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Tu potom upravíme užitím tzv. *Gaussovy eliminace.* Této metodě se budeme detailně věnovat později (viz str. 34). Zde si pouze uvedeme jednu z možných posloupností vzájemně ekvivalentních matic, které vedou k příslušné matici v *Gaussově tvaru.* Zvídavý čtenář si pak sám může promyslet jednotlivé úpravy odpovídající uvedeným maticím.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 6 & 7 \end{array}\right] \sim$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Příklad 6. *Řešte v R^3 soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1, & \sqrt{2}, & 5, & -0.14 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definice 3.1 (**Matice**). *Matice je obdélníkové nebo čtvercové uspořádání prvků do řádků a sloupců.*

Typ matice

Matice A je typu $(3,3)$, matice B je typu $(3,1)$, matice C a E jsou typu $(3,4)$ a matice D je typu $(1,4)$.

Typ matice zapisujeme buď ve tvaru (m,n) nebo ve tvaru $m \times n$ (čteme „m krát n“). Je-li potřeba informovat o typu matice, zapisujeme $A_{(3,3)}$, $B_{(3,1)}$, $C_{(3,4)}$ nebo $A_{3\times 3}$, $B_{3\times 1}$, $C_{3\times 4}$.

Matice A je příkladem tzv. **čtvercové matice**. Konkrétně se jedná o čtvercovou matici řádu 3 (nebo 3. řádu, nebo 3. stupně).

Prvek matice

Jeho umístění v matici je udáno číslem řádku (index i) a číslem sloupce (index j).

Prvek matice A značíme a_{ij}, prvek matice M potom m_{ij}.

Příklad 7. *Je dána matice*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Určete hodnoty prvků m_{21}, m_{22}, m_{12} *této matice.*

Prvkem matice může být číslo, funkce nebo klidně zase matice.

Zápis matice

K zápisu matic budeme používat hranaté nebo kulaté závorky:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Rovnými závorkami pak budeme značit **determinant matice**:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Symbolický zápis matice

Matice označujeme velkými písmeny, např. $A, B, M, N, ...,$ jejich prvky potom odpovídajícími malými písmeny $a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, ...$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Příklady matic: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 3+4i & 2-3i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1,3,8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$.

Obdélníková matice $m \neq n$

Čtvercová matice $m = n$

Čtvercová matice typu (n, n) se nazývá **čtvercová matice** $n-$**tého řádu**.

Řádky a sloupce matice

Prvky matice jsou organizovány do řádků (řádkových vektorů) a sloupců (sloupcových vektorů).

$i-$tý řádek (řádkový vektor): $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) = a_i$

$j-$tý sloupec (sloupcový vektor): $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}) = \overline{a}_i$

Příklad 8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transponovaná matice k matici A: A^T

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]\,.$$

Příklad 9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hlavní diagonála matice

- je tvořena prvky se stejným číslem řádku a sloupce, tj. prvky a_{ii}.

Diagonální matice

- všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou rovny nule

Příklad 10.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Většinou se pod pojmem diagonální matice rozumí matice čtvercová. Někdy se však tento pojem zobecňuje i na obdélníkové matice.

Jednotková matice

- diagonální matice se všemi prvky na hlavní diagonále rovnými jedné, tj. $a_{ii} = 1$.

Příklad 11.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Jednotková matice je čtvercová. Je-li třeba, zapisujeme $I_{(n,n)}$ nebo $I_{n\times n}$, např. $I_{3\times 3}$.

Trojúhelníková matice

$$\text{horní:} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{dolní:} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Trojúhelníková matice je čtvercová.

Symetrická matice: $a_{ij} = a_{ji}$, tj. $A^T = A$

Příklad 12.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Symetrická matice je čtvercová.

Příklad 13. *Zápis kuželosečky* $x^2 + 6xy + 9y^2 + 2y - 1 = 0$ *pomocí (symetrické) matice:*

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Antisymetrická matice: $a_{ij} = -a_{ji}$, tj. $A^T = -A$

Příklad 14.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Příklad 15. *Matice otočení kolem počátku o úhel* α*:*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Nulová matice: $a_{ij} = 0$

Příklad 16.

$$O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$