7 Aplikace Gaussovy eliminace

7.1 Řešení soustavy lineárních rovnic

V kapitole 6 jsme se seznámili s Gaussovou eliminací prostřednictvím jejího použití při řešení soustavy lineárních rovnic. Věnovali jsme se při tom především popisu této eliminační metody a představení jednotlivých úprav, které ji tvoří. Skutečnost, že řešíme soustavu rovnic tak prozatím ustoupila do pozadí. Detailní a obecný popis metody řešení soustav lineárních rovnic užitím eliminace nás teprve čeká. Klíčovou roli při rozhodování o řešitelnosti dané soustavy hraje v této metodě tzv. *Frobeniova věta*, která operuje s pojmem *hodnost matice*.

7.2 Hodnost matice

Hodností dané matice A rozumíme číslo, které je rovno počtu řádků matice v Gaussově tvaru (mějme na paměti, že nulové řádky nepočítáme), která je s maticí A ekvivalentní. Hodnost matice A značíme

$$h(A).$$

Poznámka. Po zavedení pojmů „vektorový prostor“ a „dimenze“ budeme hodnost matice definovat jako **dimenzi vektorového prostoru generovaného řádkovými (sloupcovými) vektory matice**.

Příklad 32. *Určete hodnost matice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Pro hodnost matice typu (m, n) platí:

$$h(A) \leq \min(m, n).$$

7.3 Regulární/singulární matice

Čtvercovou matici A nazýváme **regulární**, právě když je její hodnost $h(A)$ rovna jejímu stupni, tj. platí:

$$h(A) = n.$$

Příklad 33. *Která z následujících matic je regulární?*

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, *b)* $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$,

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, *d)* $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme **singulární**.

7.4 Výpočet inverzní matice

Nyní se vrátíme k násobení matic, jehož vlastnostmi jsme se zabývali na str. 27. Ukážeme si, že ke každé regulární čtvercové matici existuje *inverzní matice*, tj. inverzní prvek vzhledem k operaci násobení matic.

Nechť A je čtvercová matice stupně n. Matice X téhož stupně se nazývá **inverzní maticí k matici** A, jestliže platí

$$X \cdot A = A \cdot X = I, \tag{1}$$

kde I je jednotková matice stupně n. Inverzní matici značíme

$$A^{-1}.$$

K výpočtu inverzní matice můžeme využít Gauss-Jordanovu eliminaci, jak ilustruje následující příklad 34.

Příklad 34. *Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Řešení: Neznámou matici X můžeme zapsat obecně takto:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Potom lze rovnici (2) psát ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kterému odpovídají následující dvě soustavy, lišící-se jenom pravými stranami:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 3x_3 & = & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_4 & = & 0 \\ 4x_2 + 3x_4 & = & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Tyto soustavy řešíme najednou, pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace jedné společné „rozšířené“ matice:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]. \tag{3}$$

Potom:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Ze zadání příkladu je zřejmé, že nalezená matice X je matice inverzní k matici A.

ÚKOL: Ověřte, zda pro nalezenou matixi X platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Poznámka. Z postupu řešení příkladu 34 vyplývá, že inverzní matice existuje pouze k regulární matici, jinak by nebylo možné dostat v levé části výsledné dělené matice ve vztahu (3) matici jednotkovou. **Regulární matici** proto můžeme charakterizovat také jako čtvercovou matice, k níž **existuje matice inverzní**. V opačném případě hovoříme o matici **singulární**.

Zbývá vyřešit dvě otázky týkající se existence a výpočtu inverzní matice:

1) Pokud existuje inverzní matice, je jediná, nebo jich může být více?

2) Je nutné při výpočtu inverzní matice postupně použít obě pořadí násobení uvedená v definičním vztahu (1), nebo stačí jenom jedno z nich?

Ad 1) **Jednoznačnost existence inverzní matice**

Nabízí se otázka, zda může k dané regulární matici existovat více navzájem různých inverzních matic. Odpovědí je, že ne. Platí toto tvrzení: „Pokud k matici A existuje inverzní matice, je jediná.“

Jeho důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existují dvě matice B a C, které splňují definici inverzní matice k A, tj. $AB = BA = I$ a $AC = CA = I$. Potom ale $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$, což je spor. Předpoklad tedy není správný, existuje jediná inverzní matice k A (pokud existuje).

Ad 2) **Výpočet inverzní matice**

Při výpočtu inverzní matice k A budeme využívat následující vlastnost:

„Jestliže A je regulární matice a pro matici X platí buď $AX = I$ nebo $XA = I$, je X maticí inverzní k A, tj. $X = A^{-1}$.“

Při důkazu uvedené vlastnosti předpokládáme platnost vztahu $AX = I$ a snažíme se dokázat platnost vztahu $XA = I$. Přitom ještě využijeme definici inverzní matice. Platí $XA = IXA = (A^{-1}A)XA = A^{-1}(AX)A = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$.

Poznatky získané řešením příkladu 34 na str. 39 a výše uvedené důkazy jednoznačnosti existence inverzní matice a postačující podmínky pro určení inverzní matice završíme formulací názvu použité metody a jejího schematického znázornění:

Výpočet inverzní matice užitím Gaussovy-Jordanovy eliminace:

$$\left[\, A \,\middle|\, I \,\right] \sim \ldots \sim \left[\, I \,\middle|\, A^{-1} \,\right]. \tag{4}$$

Příklad 35. *Určete inverzní matici k matici*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pro regulární matice A, B téhož stupně platí:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{5}$$

ÚKOL: Ukažte platnost vlastnosti (5) na příkladu matic:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Vlastnost podobná (5) platí i pro **transponované matice**, tj.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \tag{6}$$

ÚKOL: Ukažte platnost této vlastnosti na příkladu matic:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

7.5 Řešení maticových rovnic

Maticovými rovnicemi budeme rozumět rovnice ve tvarech $AX = B, XA = B$ nebo $AXB = C$, kde A, B, C, X jsou matice, přitom A, B, C jsou dány, zatímco X je neznámá. Každou takovouto rovnici můžeme řešit postupem, který jsme použili na počátku řešení příkladu 34 (kde jsme vlastně řešili maticovou rovnici ve tvaru $AX = B$) a který byl založen na reprezentaci neznámé matice X pomocí jejích (neznámých) prvků $x_1, x_2, ...x_{m+n}$ (pro matici X typu (m, n)) a následném řešení soustavy $m+n$ lineárních rovnic s těmito prvky jako neznámými.

Nyní si uvedeme další dvě metody řešení maticových rovnic, obě založené na eliminaci. První z nich spočívá v přímé aplikaci eliminace k vyřešení rovnice, druhá pak využívá eliminaci k nalezení inverzní matice, která je následně použita k vyřešení rovnice.

7.5.1 Řešení maticových rovnic eliminací

a) Rovnice typu $AX = B$

Použijeme postup (3), kterým jsme na str. 39 získali k dané matici matici inverzní (jeho symbolický zápis (4) je uveden na str. 41). K rovnici $AX = B$ přiřadíme dělenou matici $[A|B]$, ke které Gauss-Jordanovou eliminací najdeme ekvivalentní matici ve tvaru $[I|R]$. Potom matice R je řešením dané rovnice, tj. $X = R$. Schematicky zapíšeme tento postup takto:

$$AX = B \to \left[\ A \,\middle|\, B\ \right] \sim ... \sim \left[\ I \,\middle|\, R\ \right].$$

b) Rovnice typu $XA = B$

Abychom mohli použít eliminaci, převedeme řešení této rovnice na úlohu předchozího typu. Využijeme k tomu známý vztah (viz str. 29, 41)

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T,$$

kde A, B jsou matice a operace „$\cdot$“ je násobení matic. Obě strany rovnice $XA = B$ proto nejprve transponujeme. Dostaneme tak rovnici $A^T X^T = B^T$, kterou řešíme výše uvedeným postupem pro rovnice typu $AX = B$. Musíme dát ale pozor na to, že získaná matice R na pravé straně výsledné dělené matice $[I|R]$ je transponovaná matice řešení dané rovnice, tj. $X = R^T$. Schematicky zapíšeme uvedený postup takto:

$$XA = B \to A^T X^T = B^T \to \left[\ A^T \,\middle|\, B^T\ \right] \sim \ldots \sim \left[\ I \,\middle|\, R\ \right] \to X = R^T.$$

c) Rovnice typu $AXB = C$ eliminací nepočítáme.

7.5.2 Řešení maticových rovnic užitím inverzní matice

Nyní si ukážeme, jak se dá k řešení všech tří typů maticových rovnic výhodně použít inverzní matice. Využijeme při tom definiční vztah (1) (viz str. 38) pro inverzní matici zapsaný ve tvaru

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I. \tag{7}$$

Inverzní matici počítáme užitím eliminace, jak je uvedeno na str. 41. Na str. 75 si uvedeme ještě jednu metodu výpočtu inverzní matice, užitím tzv. *adjungované matice*. Ta se ukáže jako velice efektivní pro výpočet inverzních matic „malých“ matic typu $(2, 2)$.

a) Rovnice typu $AX = B$

Užitím inverzní matice k matici A vyjádříme z rovnici neznámou matici X. Postupujeme (při odvození, k vlastnímu výpočtu potom použijeme jenom výsledek tohoto odvození) tak, že obě strany rovnice

$$AX = B \tag{8}$$

vynásobíme **zleva** maticí A^{-1} (směr násobení je důležitý a je třeba ho dodržet na obou stranách, protože, jak víme, násobení matic není komutativní). Dostaneme

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \tag{9}$$

což se dá díky (7) přepsat jako

$$IX = A^{-1}B, \tag{10}$$

tj.

$$X = A^{-1}B. \tag{11}$$

Výpočtem pravé strany vztahu (11) tak dostaneme řešení rovnice (8)

b) Rovnice typu $XA = B$

Podstata postupu řešení rovnice tohoto typu je stejná jeko u typu předchozího, akorát násobíme obě její strany maticí A^{-1} **zprava**. Aplikací analogických úprav pak postupně dostaneme rovnice

$$XA = B, \tag{12}$$

$$XAA^{-1} = BA^{-1}, \tag{13}$$

$$XI = BA^{-1}, \tag{14}$$

$$X = BA^{-1}, \tag{15}$$

kde, stejně jako v předchozím případě, využijeme pravou stranu výsledného vztahu (15) k přímému výpočtu řešení rovnice (12).

c) Rovnice typu $AXB = C$

Při řešení rovnice tohoto typu uplatníme oba předchozí postupy najednou tak, obě její strany násobíme nejprve maticí A^{-1} **zleva** a potom maticí B^{-1} **zprava**, přitom provádíme stejné úpravy jako v obou případech. Postupně tak dostáváme rovnice

$$AXB = C, \tag{16}$$

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}, \tag{17}$$

$$IXI = A^{-1}CB^{-1}, \tag{18}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}, \tag{19}$$

kde, opět, pravá strana výsledného vztahu (19) poslouží k přímému výpočtu řešení rovnice (16).

Příklad 36. *Jsou dány matice* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$. *Najděte neznámou matici X tak, aby platilo:*
a) $AX = B$, b) $XA = B$, c) $AXB = C$.

Příklad 37. *Řešte maticové rovnice*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$, b) $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$.

7.6 Lineární závislost vektorů

Definice 7.1 (Lineární závislost vektorů)**.** *Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ nazýváme lineárně závislé právě tehdy, když lze jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, tj. když existuje takové $k \in \{1, 2, ..., n\}$, pro které lze vektor $\vec{v}_k$ zapsat takto:*

$$\vec{v}_k = c_1\vec{v}_1 + c_1\vec{v}_1 + ... + c_{k-1}\vec{v}_{k-1} + c_{k+1}\vec{v}_{k+1} + ... + c_n\vec{v}_n,$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n \in R$.

Ukážeme si, že Gaussova eliminace je efektivním nástrojem pro nalezení takového mezi danými vektory, který je lineární kombinací ostatních. Tak můžeme pomocí Gaussovy eliminace rozhodovat o lineární závislosti či nezávislosti dané skupiny vektorů.

Příklad 38. *Jsou dány vektory $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (2, 1, 3), \vec{c} = (3, 0, 5)$. Rozhodněte o jejich lineární závislosti.*

Řešení: Vytvoříme matici tak, že dané vektory tvoří její řádky. Jako čtvrtý sloupec, který umístíme vně matice, uvedeme jména vektorů. Potom Gaussovou eliminací přejdeme od dané matice k matici v Gaussově tvaru s ní ekvivalentní. Jednotlivé kroky eliminace provádíme vždy s celými řádky, čtvrté sloupce dílčích matic tak slouží k „zaznamenávání“ těchto kroků. Výsledkem je následující posloupnost vzájemně ekvivalentních matic

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \vec{a} \\ \vec{b}-2\vec{a} \\ \vec{c}-3\vec{a} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \vec{a} \\ \vec{b}-2\vec{a} \\ \vec{c}-3\vec{a}-2(\vec{b}-2\vec{a}) \end{array}.$$

Důležitý je pro nás poslední řádek výsledné matice v Gaussově tvaru. Tento řádek je nulový, přitom v „kontrolním“ (či „záznamovém“) sloupečku je výraz $\vec{c}-3\vec{a}-2(\vec{b}-2\vec{a})$. Po zjednodušení uvedeného výrazu můžeme tuto skutečnost interpretovat rovností

$$\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}=\vec{o},$$

ze které je patrné, že kterýkoliv z vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Například pro $\vec{a}$ platí $\vec{a}=2\vec{b}-\vec{c}$, vyjádření zbývajících vektorů je nasnadě. Můžeme proto konstatovat, že dané tři vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně závislé.

Zkušenost získanou řešením příkladu 38 využijeme k zefektivnění metody určování lineární závislosti/nezávislosti daných vektorů tak, abychom nemuseli k matici připojovat „záznamový“ sloupeček. Z výsledku je zřejmé, že pokud jsou vektory lineárně závislé, musí Gaussovou eliminací vzniknout alespoň jeden nulový řádek, tj. hodnost matice musí být menší, než je počet zkoumaných vektorů (tj. počet řádků úvodní matice).

Postup vyšetřování lineární závislosti dané skupiny vektorů můžeme tedy formulovat takto: (i) *Vektory zapíšeme do matice jako její řádky.* (ii) *Gaussovou eliminací zjistíme hodnost této matice.* (iii) *Hodnost porovnáme s počtem daných vektorů.* (iv) *Pokud je hodnost menší než počet vektorů, jsou tyto vektory lineárně závislé. Pokud je hodnost stejná* *jako počet vektorů, jsou vektory lineárně nezávislé. Situace, kdy hodnost matice je větší než počet vektorů, nemůže nastat.*

Otázkami lineární závislosti a nezávislosti vektorů se detailně zabývá předmět *Lineární algebra a geometrie*. Tam je ukázáno a dokázáno , že pro vyšetřování lineární závislosti vektorů lze použít také matici, v níž jsou vektory organizovány do sloupců. Toto uspořádání je mnohdy výhodnější pro svou přímou korespondenci k řešení soustavy lineárních rovnic.

Řešení příkladu 38 nám ještě ukazuje možnost „alternativní" definice lineární závislosti pomocí nulového vektoru následujícím způsobem.

Definice 7.2 (Lineární závislost vektorů)**.** *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ z vektorového prostoru V nad tělesem T se nazývají* **lineárně závislé**, *právě když existuje aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\exists\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee ... \vee a_n \neq 0).$$

Poznámka. *Netriviální* je taková lineární kombinace, jejíž alespoň jeden koeficient je různý od nuly. Pokud jsou všechny koeficienty rovny nule, hovoříme o *triviální* lineární kombinaci.

Příklad 39. *Zjistěte, který z vektorů $\vec{a}_1 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 5, 5, 1)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\vec{a}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.*

Příklad 40. *Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé. Po zjištění lineární závislosti určete tu jejich lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.*

a) $\vec{a} = (2, 5, 7)$, $\vec{b} = (6, 3, 4)$, $\vec{c} = (5, -2, 3)$,

b) $\vec{a} = (6, 4, 2)$, $\vec{b} = (-9, 6, 3)$, $\vec{c} = (-3, 6, 3)$.

c) $\vec{a} = (-1, 0, 3)$, $\vec{b} = (4, 2, 0)$, $\vec{c} = (-5, -1, 9)$.

d) $\vec{a} = (1, 3, 5)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$,

e) $\vec{a} = (3, -8, 1)$, $\vec{b} = (-6, 16, -2)$,

f) $\vec{a} = (3, 2, 7)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (2, 0, 3)$,

g) $\vec{a} = (3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (5, 4, 2)$,

h) $\vec{a} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{c} = (3, 2, 1, 1)$,

i) $\vec{a} = (3, 0, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 0, 3)$, $\vec{d} = (1, 0, 3, 0)$.