8 Determinant matice

Determinant určujeme jenom u čtvercových matic.

Příklad 41. *Řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \qquad (20) \\ 2x + 3y &= 5. \qquad (21) \end{aligned}$$

Řešení: Soustavu řešíme například sčítací metodou. Po odečtení dvojnásobku (22) od rovnice (23) dostaneme $y = \frac{3}{5}$. Dosazením do první rovnice pak dostaneme $x = \frac{8}{5}$.

Příklad 42. *Řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \qquad (22) \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2. \qquad (23) \end{aligned}$$

Řešení: Za předpokladu, že výraz $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ je různý od nuly, dostáváme toto řešení:

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

8.1 Užití determinantů při řešení soustavy lineárních rovnic

Cramerovo pravidlo

Dané soustavě dvou rovnic o dvou neznámých přiřadíme následující tři čtvercové matice a u každé z nich vypočítáme její determinant:

1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ … matice soustavy

Při výpočtu determinantu této (i dalších dvou) matice uplatníme tzv. **křížové pravidlo**, které usnadňuje výpočet determinantu u matic druhého řádu:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2. $A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}$ … matice soustavy, u níž je **první sloupec nahrazen** sloupcovým vektorem pravých stran rovnic $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

$$\det A_1 = b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2$$

3. $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$ … matice soustavy, u níž je **druhý sloupec nahrazen** sloupcovým vektorem pravých stran rovnic $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$:

$$\det A_2 = a_{11} \cdot b_2 - a_{12} \cdot b_2$$

Řešení dané soustavy lze potom, za předpokladu, že $\det A \neq 0$, zapsat ve tvaru

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}.$$

Aplikací uvedeného postupu na Příklad 41 dostaneme výsledky, které odpovídají jeho výše uvedenému řešení:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{3}{5}.$$

Tato metoda není spojena jenom se soustavou dvou rovnic o dvou neznámých. Lze ji použít při řešení jakékoliv (regulární) soustavy n lineárních rovnic o n neznámých. Této metodě řešení regulárních soustav se říká Cramerovo pravidlo. Obecně ji lze zapsat takto:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}; \quad \det A \neq 0.$$

Příklad 43. *Vypočtěte obsah rovnoběžníku, který je určen vektory* $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$.

Příklad 44. *Vypočtěte obsah rovnoběžníku, který je určen vektory* $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 5)$.

8.2 Zápis determinantu

Uvažujme matici druhého řádu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, potom determinant matice A zapíšeme ve tvaru

$$\det A \qquad \text{nebo} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

V případě matice řádu 2 pak již víme, že $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$,

8.3 Výpočet determinantu

Determinant je definován (Def.8.1) pro čtvercové matice všech řádů stejně. Pro matice řádů 1, 2, 3 a 4 se ale liší obvyklé způsoby jeho výpočtu. Nyní se s nimi seznámíme.

1. Matice řádu $n = 1$:

$$A = [a_{11}]\,, \qquad \text{potom} \qquad \det A = a_{11}.$$

2. Matice řádu $n = 2$: **KŘÍŽOVÉ PRAVIDLO**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{potom} \qquad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

3. Matice řádu $n = 3$: **SARRUSOVO PRAVIDLO**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

potom

$$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) -$$
$$-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}).$$

Výpočet determinantu matice 3. řádu si usnadníme uplatněním následujícího schématického postupu:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Nejprve násobíme prvky matice v následujících třech liniích rovnoběžných s hlavní diagonálou a tyto součiny sečteme:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Tak dostaneme výraz

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \tag{24}$$

Potom opakujeme stejný postup pro následující tři směry rovnoběžné s druhou diagonálou:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Výsledkem je výraz

$$(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \tag{25}$$

Determinant matice A je potom roven rozdílu výrazů 24 a 25:

$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}).$

4. Matice řádu $n > 3$: **ROZVOJ DETERMINANTU**

Rozvoji determinantu a jeho použití se zevrubně věnují kapitoly 8.8, 8.9.

Poznámka. Tato metoda výpočtu determinantu je použitelná pro matici jakéhokoliv řádu. Pro řády $n \leq 3$ však většinou volíme speciální metody uvedené výše.

5. TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE

Pro čtvercové matice libovolného stupně, které mají pod nebo nad hlavní diagonálou samé nuly je determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále.

Příklad 45. *Vypočtěte determinant matice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Příklad 46. *Vypočtěte determinanty těchto matic:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

8.4 Permutace množiny

Příklad 47. *Vypočtěte následující determinanty. Hledejte společné rysy výrazů pro hodnoty determinantů matic 2. a 3. stupně. Potom se pokuste definovat determinant.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \ldots, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots$$

Poznatek z řešení příkladu 47:

Determinant matice je tvořen všemi takovými součiny, že z každého řádku a z každého sloupce matice je v každém z nich obsažen právě jeden prvek.

Těchto součinů je $n!$ (n faktoriál), kde n je stupeň matice. Část z nich je uvedena znaménkem „-“, část pak znaménkem „+“.

K vyslovení úplné definice determinantu zbývá už jenom říci, že o tomto znaménku rozhoduje pořadí, v jakém vybíráme činitele příslušného součinu z jednotlivých sloupců. Jedná se o **znaménko permutace sloupcových indexů**.

Řešení příkladu 47 můžeme zapsat takto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+ (-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

kde exponenty u -1 vyjadřují počet inverzí v odpovídajících permutacích sloupcových indexů. Znaménko mocniny pak odpovídá znaménku těchto permutací.

8.4.1 Permutace množiny

Permutací množiny M rozumíme každé vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M na sebe.

Uvažujme například množinu $M = \{1, 2, 3\}$. Potom zobrazení f, pro které platí $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, je permutací.

Permutace množiny M představuje určité uspořádání jejích prvků. To známe z kombinatoriky. Víme, že počet všech permutací $n-$prvkové množiny je roven $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (tj. n faktoriál).

Permutaci obvykle **značíme** písmenem π. Symbolicky ji můžeme zapsat jako zobrazení

$$\pi : M \to M.$$

Konkrétní permutace množiny $M = \{1, 2, 3\}$ zapisujeme takto:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad ...$$

Potom pro obrazy prvků množiny M platí například, že $\pi_1(2) = 2$, $\pi_2(1) = 3$, $\pi_3(2) = 3$ apod.

Poznámka. Množina všech permutací množiny M spolu s operací skládání permutací (tj. skládání zobrazení, protože permutace je zobrazení) tvoří grupu. Ukažte to na příkladě. Je tato grupa komutativní?

Obecnou permutaci na množině $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$ zapíšeme takto:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & ... & r_n \end{pmatrix}, \tag{26}$$

potom pro obraz prvku i množiny M platí

$$\pi(i) = r_i.$$

Inverze

Inverzí permutace π rozumíme dvojici obrazů r_k, r_l v matici (26), níž je větší číslo před menším, tj. $r_k > r_l$. Přitom tato čísla nemusí být v zápise permutace vedle sebe.

Pokud tedy v zápise permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k & ... & l & ... & n \\ r_1 & r_2 & ... & r_k & ... & r_l & ... & r_n \end{pmatrix}$$

je $r_k > r_l$, **tvoří tato dvě čísla jednu inverzi**.

Znaménko permutace

Znaménkem znπ (nebo sgnπ) permutace π rozumíme hodnotu výrazu $(-1)^k$, kde k je počet všech **inverzí** permutace π. Zapisujeme

$$\text{zn}\pi = (-1)^k.$$

Permutaci o sudém počtu inverzí nazýváme **sudou permutací**. Permutaci o lichém počtu inverzí pak nazýváme **lichou permutací**. Hodnotu funkce znπ nazýváme **paritou** permutace. Sudá permutace má paritu $+1$, lichá potom -1.

Příklady permutací a určení jejich znamének:

a) Permutace π_1 na množině $M = \{1, 2, 3\}$:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \qquad \text{zn}\pi_1 = (-1)^1 = -1.$$

b) Permutace π_2 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k = 3, \qquad \text{zn}\pi_2 = (-1)^3 = -1.$$

c) Permutace π_3 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 4, \qquad \text{zn}\pi_3 = (-1)^4 = 1.$$

Příklad 48. *Determinant matice druhého řádu:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Jedna inverze v pořadí, proto znaménko minus.

8.5 Definice determinantu

Definice 8.1 (DETERMINANT)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice $n-$tého řádu nad tělesem T. Determinantem matice A rozumíme prvek tělesa T ve tvaru:*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{zn}\pi \cdot a_{1r_1} \cdot a_{2r_2} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace π množiny $1, 2, 3, ..., n$. Množina těchto permutací je označena symbolem S_n.

Příklad 49.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+ (-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

8.6 Pravidla pro počítání s determinanty (vlastnosti determinantu)

Pro počítání s determinanty platí následující pravidla. Tato pravidla se běžně uvádějí ve formě věty (nebo jednotlivých vět). Důkaz pak vesměs vychází z uvedené definice determinantu. My se zde spokojíme se seznamem těchto pravidel, doplněným ilustračními příklady.

1. Zaměníme-li vzájemně dva řádky (sloupce), změní determinant své znaménko.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

2. Jsou-li všechny prvky jednoho řádku (sloupce) rovny nule, je determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot 0\cdot 1+2\cdot 0\cdot(-3)+3\cdot 0\cdot 1)-(3\cdot 0\cdot(-3)+2\cdot 0\cdot 1+1\cdot 0\cdot 1) = 0$$

3. Obsahuje-li matice dva stejné řádky (sloupce), je její determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1\cdot 2\cdot 6+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 1\cdot 5)-(3\cdot 2\cdot 4+2\cdot 1\cdot 6+1\cdot 3\cdot 5) = 0$$

4. Je-li řádek (sloupec) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je determinant roven nule.

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \\ &\quad = (1\cdot 2\cdot k\cdot 6+2\cdot 3\cdot k\cdot 4+3\cdot 1\cdot k\cdot 5)- \\ &\quad -(3\cdot 2\cdot k\cdot 4+2\cdot 1\cdot k\cdot 6+1\cdot 3\cdot k\cdot 5) \\ &\quad = 1\cdot 2\cdot k\cdot 6+2\cdot 3\cdot k\cdot 4+3\cdot 1\cdot k\cdot 5- \\ &\quad -3\cdot 2\cdot k\cdot 4-2\cdot 1\cdot k\cdot 6-1\cdot 3\cdot k\cdot 5 = 0, \end{aligned}$$

Poznámka. Z porovnání posledních dvou příkladů plyne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Jedná se o projev následující vlastnosti determinantů.

5. Násobíme-li prvky jednoho řádku (sloupce) nějakým číslem, násobí se tímto číslem celý determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -26 = -2 \cdot 13.$$

Důsledky:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$

(ii) $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$, kde n je stupeň matice A.

6. Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců).

Důsledek:

Možnost užití Gaussovy eliminace při výpočtu determinantu.

Příklad 50. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -3.$$

Příklad 51. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

7. Determinant matice transponované je stejný jako determinant matice původní.

$$\det A = \det A^T$$

8. Determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů jednotlivých matic (Cauchyho věta).

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důsledky:

(i) $A \cdot B \neq B \cdot A$, ale

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A).$$

(ii) $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \quad \wedge \quad \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$, potom dostáváme vztah pro výpočet determinantu inverzní matice $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, který uvádíme jako další vlastnost.

9. Determinant inverzní matice je roven převrácené hodnotě determinantu matice původní

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Poznámka. Pro čtvercovou matici A stupně n platí, že následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $h(A) = n$, (ii) $\det A \neq 0$, (iii) A je **regulární**.