

## 8.8 Věta o rozvoji determinantu

**Příklad 52.** Ukažte, že platí

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Potom ověřte, zda analogický „rozklad“ daného determinantu, ovšem pro jiný řádek nebo sloupec, vede ke stejnému výsledku.

**Příklad 53.** Podle vzoru příkladu 52 dokončete rozklady:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

**Definice 8.2** (Algebraický doplněk prvku matice). Nechť  $A$  je čtvercová matice řádu  $n$ . Determinant matice, která vznikne z  $A$  vynecháním  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce nazveme **subdeterminantem** a značíme  $M_{ij}$ . Číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

nazveme **algebraickým doplňkem** prvku  $a_{ij}$ .

**Definice 8.3** (Rozvoj determinantu). Je-li čtvercová matice řádu  $n \geq 2$ , pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$  definujeme rozvoj matice  $A$  podle  $i$ -tého řádku jako výraz

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

a pro každé  $j = 1, 2, \dots, n$  definujeme rozvoj matice  $A$  podle  $j$ -tého sloupce

$$a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Hodnoty těchto rozvoju jsou nezávislé na volbě řádku nebo sloupce a jsou ve všech případech rovny hodnotě determinantu matice  $A$ .

**Věta 8.1** (O rozvoji determinantu - podle  $i$ -tého řádku). *Nechť  $A = (a_{ij})$  je čtvercová matice stupně  $n$ . Potom*

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde  $\delta_{ij}$  je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí:  $\delta_{ij} = 1$  pro  $i = j$  a  $\delta_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ .

**Věta 8.2** (O rozvoji determinantu 2 - podle  $i$ -tého sloupce). *Nechť  $A = (a_{ij})$  je čtvercová matice stupně  $n$ . Potom*

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot A_{kj} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde  $\delta_{ij}$  je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí:  $\delta_{ij} = 1$  pro  $i = j$  a  $\delta_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ .

*Důkaz.* - naznačení důkazu věty o rozvoji podle  $i$ -řádku na příkladu matice 3. řádu a jejího rozvoje podle druhého řádku.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{21} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^3 \cdot \\
&\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\
&= a_{21} \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.
\end{aligned}$$

□

**Poznámka.** Z uvedených vět plynou následující vztahy, které pro nás budou zanedlouho důležité:

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + \dots + a_{n1}A_{n2} = 0, \quad \text{pro } i \neq j, \quad (27)$$

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{n2}A_{n2} = \det A, \quad \text{pro } i = j. \quad (28)$$

## 8.9 Výpočet determinantu matice stupně $n > 3$

Využíváme tyto dvě metody:

1. Rozvoj determinantu podle řádku (sloupce).
2. Převedení matice na trojúhelníkový tvar užitím Gaussovy eliminace (při respektování vlivu úprav matice na hodnotu determinantu).

**Poznámka.** Většinou uvedené metody kombinujeme. Nejprve vhodnou manipulací s řádky (sloupci) zajistíme sloupec (řádek) s jediným nenulovým prvkem (aby měl příslušný rozvoj jenom jeden člen). Potom podle něj provedeme rozvoj.

**Upozornění:** Je třeba neustále myslet na to, jak příslušná manipulace s řádky (sloupci) mění hodnotu (třeba jenom znaménko) determinantu matice.

**Příklad 54.** *Vypočtěte determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix}.$$