

## 11 Řešení soustav lineárních rovnic

### 11.1 Lineární rovnice

**Lineární rovnicí o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$  s reálnými koeficienty** rozumíme rovnici ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (32)$$

kde koeficienty  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  jsou reálná čísla.

Označení „lineární“ vyjadřuje skutečnost, že každá z neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se v rovnici vyskytuje nejvýše v první mocnině. Pokud by nejvyšší mocninou, v níž se v rovnici vyskytuje proměnná, byla mocnina druhá, resp. třetí, hovořili bychom o rovnici kvadratické, resp. kubické (případně o rovnici druhého, resp. třetího stupně).

V případě rovnic o jedné, dvou či třech neznámých používáme pro označení neznámých a koeficientů často i jiné symboly než v (32), např. neznámé označujeme  $x, y$  a  $z$  a koeficienty  $a, b, c$  a  $d$ :

$$ax = b, \quad ax + by = c, \quad ax + by + cz = d.$$

### 11.2 Soustava lineárních rovnic

Budeme uvažovat soustavu  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých s reálnými koeficienty (obecně s koeficienty z tělesa<sup>1</sup>  $T$ ; potom hovoříme o soustavě  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých nad tělesem  $T$ ):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (33)$$

---

<sup>1</sup>„Tělesem“ zde rozumíme algebraickou strukturu (již znáte algebraickou strukturu zvanou „grupa“). V kurzu lineární algebry a geometrie budeme pracovat výhradně s tělesem reálných čísel  $\mathbb{R}$ . Definice této algebraické struktury je uvedena v kapitole věnované vektorovému prostoru.

Se soustavou (33) jsou spojeny následující dvě matice.

**Matice soustavy  $A$ :**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Rozšířená matice soustavy  $A^*$ :**

$$A^* = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

**Poznámka.** Pro označení rozšířené matice používáme i jiné symboly než  $A^*$ . Například  $A_{roz}$ .

### 11.3 Maticový zápis soustavy

Užitím násobení matic můžeme soustavu (33) zapsat ve tvaru

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

kde  $A$  je matice soustavy,  $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  je vektor neznámých a  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$  je

vektor pravých stran rovnic soustavy.

Vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{b}$  můžeme chápat také jako matice. Pak použijeme zápis

$$A \cdot X = B,$$

kde  $X = \vec{x}$  a  $B = \vec{b}$ .

Často je výhodné hledět na soustavu (33) jako na rovnost **lineární kombinace sloupcových vektorů matice  $A$**  vektoru  $\vec{b}$ :

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad (34)$$

což stručněji zapíšeme ve tvaru:

$$x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n = \vec{b}.$$

Podle vektoru pravých stran  $\vec{b}$  rozlišujeme dva typy soustavy lineárních rovnic (33):

1) Pro  $\vec{b} = \vec{o} = (0, 0, \dots, 0)$  hovoříme o **homogenní soustavě**, symbolicky ji zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = O).$$

2) Pro  $\vec{b} \neq \vec{o}$  hovoříme o **nehomogenní soustavě**, kterou symbolicky zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}; \quad \vec{b} \neq \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = B; \quad B \neq O).$$

## 11.4 Řešitelnost soustavy - Frobeniova věta

Zajímá nás, jak poznáme, zda má soustava řešení a kolik různých řešení může mít.

**Příklad 58.** *Rozhodněte o počtu řešení daných soustav. Potom je vyřešte a jejich řešení geometricky interpretujte.*

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad x + 3y + z = 5 \\ \quad \quad 2x + y + z = 2 \\ \quad \quad x + y + 5z = -7, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)} \quad 4x + 3y + 2z = 1 \\ \quad \quad x + 3y + 5z = 1 \\ \quad \quad 3x + 6y + 9z = 2, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c)} \quad x + y - 3z = -1 \\ \quad \quad 2x + 3y - 2z = 1 \\ \quad \quad x + 2y + z = 3. \end{array}$$

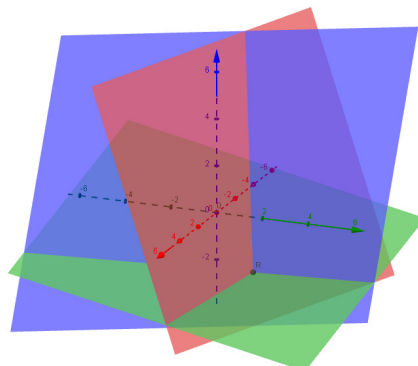
*Řešení:*

Provedeme Gaussovu eliminaci rozšířené matice každé z daných soustav:

*ad a)*

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ y - 2z = 6 \\ z = -2 \end{array}$$

$h(A) = h(A^*) = n$  (počet neznámých), soustava má jediné řešení (je regulární)



Obrázek 6: Řešení příkladu 1.1 a - tři roviny s jedním společným bodem

Řešení určíme například Gaussovou-Jordanovou eliminací (můžeme však použít také Cramerovo pravidlo, inverzní matici či přímé řešení soustavy):

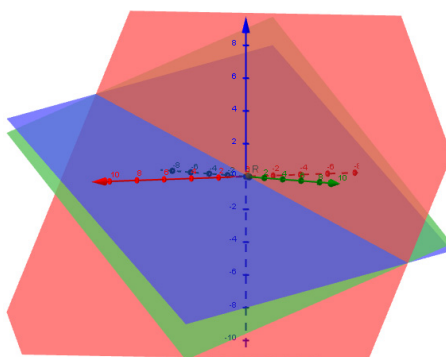
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice  $X = [1, 2, -2]$ . Geometricky toto řešení interpretujeme jako bod, který je společný třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 6.

ad b)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} x + 3y + 5z = 1 \\ 3y + 6z = 1 \end{array} \quad (35)$$

$h(A) = h(A^*) < n$  (počet neznámých), soustava má nekonečně mnoho řešení



Obrázek 7: Řešení příkladu 1.1 b - tři roviny se společnou přímkou

Řešení určíme ze soustavy (35), která odpovídá matici v Gaussově tvaru ekvivalentní s rozšířenou maticí dané soustavy:

$$\begin{array}{l} x + 3y + 5z = 1 \\ 3y + 6z = 1 \end{array}$$

Neznámé  $x, y$ , které odpovídají prvním nenulovým prvkům každého řádku matice v Gaussově tvaru zůstanou neznámými (tzv. „základní“ neznámé), zatímco neznámou  $z$  nahradíme reálným parametrem  $t$  (nejsme schopni určit hodnoty více neznámých než je počet nezávislých rovnic, proto tuto třetí neznámou uvažujeme jako „volnou“):

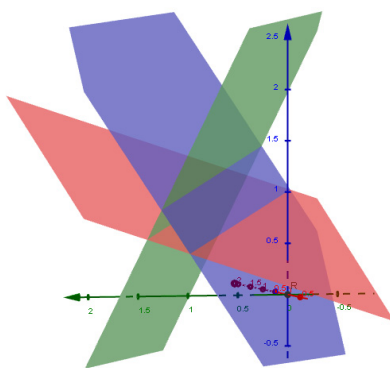
$$\begin{aligned} z &= t; \quad t \in R \\ x + 3y &= 1 - 5t \\ 3y &= 1 - 6t \end{aligned}$$

Řešením soustavy je množina všech uspořádaných trojic  $M = \{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]; t \in R\}$ . Geometricky toto řešení interpretujeme jako přímku, která je společná všem třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 7.

*ad c)*

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{aligned} x + y - 3z &= 1 \\ y + 4z &= -1 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

$h(A) < h(A^*)$ , soustava nemá řešení



Obrázek 8: Řešení příkladu 1.1 c - tři roviny nemají společný průnik

Množina řešení dané soustavy je prázdná:  $M = \emptyset$ . Geometricky lze tento závěr interpretovat tak, že roviny odpovídající daným rovnicím nemají (všechny tři) žádný společný bod, viz Obr. 8.

**Věta 11.1** (Frobeniova věta). *Soustava  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých nad tělesem  $T$  má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnota matice této soustavy je rovna hodnotě rozšířené matice soustavy, tj.*

$$h(A) = h(A^*).$$

*Důkaz.* Frobeniova věta má formu ekvivalence. Můžeme ji schematicky vyjádřit takto:

$$\text{aspoň jedno řešení} \Leftrightarrow h(A) = h(A^*).$$

Dokazujeme tedy příslušné dvě implikace:

$$(1) \text{ aspoň jedno řešení} \Rightarrow h(A) = h(A^*)$$

aspoň jedno řešení  $\Rightarrow$  ex.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tak, že  $x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{a}_n = b \Rightarrow b$  je lineární kombinací vektorů  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ . Potom se jeho přidáním k matici tvořené vektory  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  nemůže zvýšit její hodnota, tj.  $h(A) = h(A^*)$ . Symbolicky zapsáno:  $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n] = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, b] \Rightarrow h(A) = h(A^*)$ .<sup>2</sup>

$$(2) h(A) = h(A^*) \Rightarrow \text{aspoň jedno řešení}$$

$h(A) = h(A^*) \Rightarrow b$  je lineární kombinací vektorů  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \Rightarrow$  existuje řešení  $x_1, x_2, \dots, x_n$  □

---

<sup>2</sup>Zápisem  $[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n]$  rozumíme tzv. **lineární obal** množiny vektorů  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ , což je **množina všech lineárních kombinací těchto vektorů**. Více v partiích věnovaných pojmu „Vektorový prostor“.

**Poznámka.** Řešení soustavy lineárních rovnic může dopadnout trojím způsobem. Buď má právě jedno řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení a nebo řešení nemá. Jiná možnost není. Jak to dopadne, poznáme už při ověřování platnosti Frobeniovy podmínky takto:

(i)  $h(A) = h(A^*) = n \dots$  soustava má právě jedno řešení (tj. jednu uspořádanou  $n$ -tici),

(ii)  $h(A) = h(A^*) < n \dots$  soustava má nekonečně mnoho řešení (tj. nekonečně mnoho uspořádaných  $n$ -tic, které tvoří nějaký „podprostor“, např. přímku nebo rovinu),

(iii)  $h(A) \neq h(A^*) \dots$  soustava nemá řešení.

**Příklad 59.** *Rozhodněte o řešitelnosti daných soustav. U každé z nich rozhodněte, zda má právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, či zda nemá žádné řešení. Své tvrzení zdůvodněte.*

$$\begin{array}{lll}
 a) & \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 4x + 3y - z = 7, \end{array} & b) \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + 3y - 5z = 2, \end{array} & c) \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ -x + y + 2z = 4. \end{array}
 \end{array}$$

## 11.5 Vztah mezi řešením nehomogenní a příslušné homogenní soustavy lineárních rovnic

Množiny řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic a k ní příslušné homogenní soustavy spolu úzce souvisí. Zajímá nás povaha tohoto vztahu, a jak ho můžeme využít při řešení nehomogenních soustav.

**Příklad 60.** *Řešte dané dvojice homogenních a nehomogenních soustav lineárních rovnic.*

$$a) \quad \begin{array}{l} x + 2y = 0, \\ x + 2y = 5, \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} \text{b)} & -x + 2y + z = 0 & -x + 2y + z = 7 \\ & x + y + 2z = 0, & x + y + 2z = 11. \end{array}$$

*Řešení:*

*ad a)*

Řešení homogenní soustavy:  $W = \{[-2t, t]; t \in R\} = \{t(-2, 1); t \in R\}$ .

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5 - 2t, t]; t \in R\} = \{[5, 0] + t(-2, 1); t \in R\}.$$

*ad b)*

Řešení homogenní soustavy:  $W = \{[-t, -t, t]; t \in R\} = \{t(-1, -1, 1); t \in R\}$ .

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5 - t, 6 - t, t]; t \in R\} = \{[5, 6, 0] + t(-1, -1, 1); t \in R\}.$$

**Věta 11.2** (Řešení nehomogenní soustavy). *Nechť  $R$  je libovolné řešení nehomogenní soustavy  $AX = B$  a  $W_A$  je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy  $AX = O$ . Pak pro množinu  $M$  všech řešení soustavy  $AX = B$  platí:*

$$M = \{R + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

*Důkaz.* (1)  $\{R + \vec{u}\} \subseteq M$ ;  $A(R + \vec{u}) = AR + A\vec{u} = AR + \vec{o} = AR = B$

(2)  $M \subseteq \{R + \vec{u}\}$ ;  $AQ = B, AR = B \Rightarrow A(Q - R) = O \Rightarrow$  existuje  $\vec{u} = Q - R \in W_A$  tak, že  $AQ = A(R + \vec{u}) = B$ .  $\square$

**Poznámka.** Věta 11.4 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení  $R$  této soustavy a všech řešení  $\vec{u}$  příslušné homogenní soustavy.**

**Závěr:** Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj.  $h(A) = h(A^*) < n$ ) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme  $\vec{x}$ .
2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho  $R$ .
3. Množinu  $M$  všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = R + \vec{x}$$

**Poznámka.** Množina všech řešení nehomogenní soustavy tvoří tzv. **bodový prostor** (tj. je to množina bodů, také můžeme říci „množina míst“), zatímco množina všech řešení příslušné homogenní soustavy tvoří tzv. **vektorový prostor** (tj. je to množina vektorů, také můžeme říci „množina směrů“).

Prvky **bodového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 14 - Def. 2.1) nazýváme body. Každý bod, který je řešením nehomogenní soustavy, se dá vyjádřit jako součet jednoho konkrétního bodu a lineární kombinace vektorů (které jsou řešením příslušné homogenní soustavy).

Prvky **vektorového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 8 - Def. 1.1) nazýváme vektory. Každý vektor se dá vyjádřit jako lineární kombinace skupiny vektorů z téhož prostoru, kterou nazýváme **system (množina) generátorů** daného vektorového prostoru.

**Dimenze vektorového prostoru** je číslo, které udává počet lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární kombinací mohu vytvořit každý vektor uvažovaného prostoru. Systém generátorů v.p., který je tvořen lineárně nezávislými vektory se nazývá **báze** vektorového prostoru. Dimenze je tak rovna počtu vektorů báze daného vektorového prostoru. Bod (počátek) má dimenzi 0, přímka dimenzi 1, rovina dimenzi 2 a prostor má dimenzi 3.

## 11.6 Homogenní soustava $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých

Homogenní soustavou rozumíme soustavu lineárních rovnic, které mají na pravých stranách výhradně nuly (tj. všechny rovnice v soustavě jsou homogenní). Pro takovou soustavu je vždy splněna Frobeniova podmínka. Homogenní soustava má tedy vždy řešení - tzv. „triviální řešení“, které spočívá v tom, že za všechny neznámé dosadíme nuly (triviálním řešením je tedy uspořádaná  $n$ -tice tvořená samými nulami, též můžeme říci nulový vektor).

Pokud je matice homogenní soustavy regulární, tj.  $h(A) = n$ , má soustava jenom triviální řešení.

Pokud je matice soustavy singulární, tj.  $h(A) < n$ , má homogenní soustava nekonečně mnoho řešení a triviální řešení je jenom jedním z nich. Tímto případem homogenní soustavy se teď budeme zabývat.

**Příklad 61.** *Řešte homogenní soustavu*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

**Řešení:** Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$W_A = \{(s + 2t, -2s - 3t, s, t); s, t \in \mathbb{R}\},$$

Množina  $W_A$  je podprostorem vektorového prostoru  $\mathbb{R}^4$ . Můžeme ji zapsat jako lineární obal (tj. množinu všech lineárních kombinací) dvou nezávislých vektorů:

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}] \subseteq \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Dimenze  $W_A$  je potom

$$\dim W_A = 2.$$

**Věta 11.3.** *Nechť je dána homogenní soustava  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých nad tělesem  $\mathbb{R}$  a nechť matice  $A$  této soustavy má hodnost  $h(A)$ . Potom množina  $W_A$  všech řešení této soustavy je podprostor aritmetického vektorového prostoru  $\mathbb{R}^n$  a má dimenzi  $n - h(A)$ , tj.*

$$\dim W_A = n - h(A).$$

K důkazu této věty nemáme zatím vytvořeny potřebné teoretické základy. Vrátime se k němu později.

### 11.6.1 Vytvoření báze vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy

Vraťme se k řešení příkladu 61. Viděli jsme, že si ho můžeme zapsat tvaru

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}].$$

V této kapitole si na příkladech ukážeme, jak se dají přímo najít vektory báze podprostoru  $W_A$ .

Postup řešení Příkladu 61:

#### 1. Určíme tzv. základní neznámé

Provedeme Gaussovu eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Soustava odpovídající výsledné matici v Gaussově tvaru má tvar

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Neznámé, které odpovídají prvním nenulovým prvkům na každém řádku matice v Gaussově tvaru (viz podtržení), nazveme **základní neznámé**. V našem případě se jedná o  $x_1$  a  $x_2$ . Vzhledem k těmto neznámým pak řešíme soustavu, když zbývající neznámé ("nezákladní" nebo též "volné" neznámé) nahradíme reálnými parametry. V našem konkrétním případě tedy

$$\text{základní nezn. : } x_1, x_2; \quad \text{volné nezn. : } x_3 = s, \quad x_4 = t; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

## 2. Vypočítáme dimenzi prostoru řešení $W_A$

$$\dim W_A = n - h(A) = 4 - 2 = 2$$

## 3. Hledáme dvě nezávislá řešení $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ tvořící bázi $W_A$

Vektory  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  nejprve volíme takto:

$$\vec{b}_1 = (x_1, x_2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (y_1, y_2, 0, 1).$$

Potom je dosadíme do soustavy (37) a dopočítáme příslušné hodnoty  $x_1, x_2, y_1, y_2$ :

$$\vec{b}_1 = (1, -2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (2, -3, 0, 1).$$

Obecné řešení  $\vec{x}$  homogenní soustavy (61) pak můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ :

$$\vec{x} = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1); \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 62.** Řešte následující homogenní soustavu lineárních rovnic a určete bázi vektorového prostoru všech řešení této soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

**Řešení:**

$$W_A = [\{(2, 1, 0, 0, 0), (3, 0, 5, 1, 0), (7, 0, 12, 0, 1)\}]$$

Obecné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{x} = r(2, 1, 0, 0, 0) + s(3, 0, 5, 1, 0) + t(7, 0, 12, 0, 1); \quad r, s, t \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

**Poznámka.** Z tvrzení věty 11.3 plynou jasné závěry o počtu řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Je zřejmé, že hodnost matice  $A$  je vždy menší nebo rovna dimenzi  $n$  prostoru neznámých (počtu neznámých). Uvažujme nejprve  $h(A) = n$ . Po dosazení do vztahu  $\dim W_A = n - h(A)$  dostaneme pro dimenzi prostoru řešení soustavy  $\dim W_A = 0$ . Jedná se tedy o triviální podprostor obsahující jediné - **triviální (nulové) řešení** soustavy. Pro  $h(A) < n$  pak dostaneme  $\dim W_A \neq 0$ . Prostor řešení obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků - soustava má **nekonečně mnoho řešení** soustavy.

## 11.7 Nehomogenní soustava $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých

Zajímají nás zde hlavně neregulární soustavy, tj. soustavy, které mají nekonečně mnoho řešení. Již víme, jak spolu souvisí řešení takové nehomogenní soustavy s řešením jí odpovídající soustavy homogenní (viz Věta 11.4). Pokračujeme příkladem soustavy, která se, až na pravé strany, shoduje s homogenní soustavou (38) z příkladu 62.

**Příklad 63.** Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 8 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 6 \end{aligned} \quad (40)$$

**Řešení:** Řešení

$$M = \{(-14 + 2k + 3l + 7m, k, -22 + 5l + 12m, l, m)\}$$

můžeme přepsat do tvaru, v němž je patrné řešení (39) příslušné **homogenní** soustavy (38):

$$M = \{(-14, 0, -22, 0, 0) + k(2, 1, 0, 0, 0) + l(3, 0, 5, 1, 0) + m(7, 0, 12, 0, 1)\}$$

**Věta 11.4** (Řešení nehomogenní soustavy). *Nechť  $\vec{v}$  je libovolné řešení nehomogenní soustavy  $A\vec{x} = \vec{b}$  a  $W_A$  je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy  $A\vec{x} = \vec{0}$ . Pak pro množinu  $M$  všech řešení soustavy  $A\vec{x} = \vec{b}$  platí:*

$$M = \{\vec{v} + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

**Poznámka.** Věta 11.4 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení této soustavy a všech řešení příslušné homogenní soustavy.**

*Důkaz.* (1)  $\{\vec{v} + \vec{u}\} \subseteq M$ ;  $A(\vec{v} + \vec{u}) = A\vec{v} + A\vec{u} = A\vec{v} + \vec{0} = A\vec{v} = \vec{b}$

(2)  $M \subseteq \{\vec{v} + \vec{u}\}$ ;  $A\vec{w} = \vec{b}$ ,  $A\vec{v} = \vec{b} \Rightarrow A(\vec{w} - \vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow$  existuje  $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v} \in W_A$  tak, že  $A\vec{w} = A(\vec{v} + \vec{u}) = \vec{b}$ .  $\square$

**Závěr:** Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj.  $h(A) = h(A^*) < n$ ) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme  $\vec{x}$ .
2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho  $\vec{v}$ .
3. Množinu  $M$  všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = \vec{v} + \vec{x}$$

**Poznámka.** Množina všech řešení nehomogenní soustavy **netvoří vektorový prostor** (neobsahuje nulový vektor). Jedná se o tzv. **lineární množinu**. Později si ukážeme, že se jedná o afinní bodový podprostor.

## 12 Řešení regulárních soustav

Soustavu

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

nazýváme **regulární**, jestliže je regulární její matice soustavy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

To znamená, když je matice  $A$  čtvercová řádu  $n$  (tj.  $m=n$ , neznámých je stejný počet jako rovnic) a její hodnost je rovněž  $n$  (nebo je splněna ekvivalentní podmínka  $\det A \neq 0$ ). Sloupcové (řádkové) vektory regulární



matice jsou tedy lineárně nezávislé a tvoří bázi vektorového prostoru  $V_n$  dimenze  $n$  :

$$V_n = [\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}] = [\{a_1, a_2, \dots, a_n\}].$$

Připomeňme si, že soustavu (41) můžeme zapsat pomocí lineární kombinace sloupcových vektorů matice  $A$  :

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Protože  $\vec{b} \in V_n$  a množina sloupcových vektorů  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  je bází  $V_n$ , je zřejmé, že existuje jediná  $n$ -tice  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  taková aby rovnost (42) platila. Regulární soustava (41) má tedy skutečně právě jedno řešení ve tvaru  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Příklad 64.** Řešte následující soustavu v  $\mathbb{R}^4$ .

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

## 12.1 Gaussova a Gaussova-Jordanova eliminace

Použijeme ekvivalentní úpravy k převedení matice na náležitý tvar. Soustava odpovídající výsledné matici má stejné řešení jako matice původní a přitom je jednodušší.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -4 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Řešení soustavy:  $X = (-1, -1, 0, 1)$ .

## 12.2 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo a jeho důkaz najdete na straně 73

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Spočítáme příslušné determinanty:

$$\det A = 81, \quad \det A_1 = -81, \quad \det A_2 = -81, \quad \det A_3 = 0, \quad \det A_4 = 81.$$

a dle Cramerova pravidla určíme řešení soustavy:

$$x_1 = \frac{-81}{81} = -1, \quad x_2 = \frac{-81}{81} = -1, \quad x_3 = \frac{0}{81} = 0, \quad x_4 = \frac{81}{81} = 1.$$

### 12.3 Užítí inverzní matice

Řešenou soustavu můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$A \cdot X = B,$$

kde  $A$  je matice soustavy,  $B$  je matice pravých stran a  $X$  je matice neznámých. Potom pro  $X$  platí

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

kde  $A^{-1}$  je inverzní matice k matici  $A$ ,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{27} & \frac{7}{27} & 0 & \frac{1}{27} \\ -\frac{1}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{27} \\ -\frac{2}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{3} & -\frac{13}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{3} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Po vynásobení dostaneme:

$$X = A^{-1} \cdot B = (-1, -1, 0, 1).$$

## 12.4 Cvičení – Soustavy lineárních rovnic

1. Řešte dané soustavy. Nejprve ověřte platnost Frobeniovy podmínky. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy. Pokuste o geometrickou interpretaci řešení soustav.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = -3 \end{array} \\ & \left\{ \left[ -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} \right] \right\} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ x + 4y - 2z = -3 \end{array} \\ & \left\{ [1 - 2t, -1 + t, t] \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(c)} & \begin{array}{l} x + y - 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ x - 2y + 5z = 1 \end{array} \\ & \{ \} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(d)} & \begin{array}{l} x - 2y + z = 6 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ x - 3y + 3z = 10 \end{array} \\ & \left\{ [1, -2, 1] \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(e)} & \begin{array}{l} x - 2y + 2z - w = 3 \\ 3x + y + 6z + 11w = 16 \\ 2x - y + 4z + w = 9 \end{array} \\ & \left\{ [5 - 2t, 1, t, 0] \right\} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(f)} & \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 4 \\ x + 3y - 4z = -3 \\ 2x - 3y + 5z = 7 \\ x - 8y + 9z = 10 \end{array} \\ & \left\{ [1, 0, 1] \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(g)} & \begin{array}{l} 2x - 6y + 4z = 2 \\ -x + 3y - 2z = -1 \end{array} \\ & \left\{ [1 + 3s - 2t, s, t] \right\} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(h)} & \begin{array}{l} 2x + 2y + 3z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ 4x + 5y + 7z = 15 \end{array} \\ & \left\{ \left[ -\frac{15}{2}, 23, -10 \right] \right\} \end{array}$$

$$(i) \quad x + 2y = 0 \quad (j) \quad x + 2y = 3$$

$$\quad \quad \quad \{[-2t, t]\} \quad \quad \quad \{[3 - 2t, t]\}$$

$$(k) \quad x - 3y + 2z = 0 \quad (l) \quad x - 3y + 2z = 3$$

$$\quad \quad \quad \{[3s - 2t, s, t]\} \quad \quad \quad \{[3 + 3s - 2t, s, t]\}$$

$$(m) \quad \begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned} \quad (n) \quad \begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 12 \end{aligned}$$

$$\quad \quad \quad \{[-t, -t, t]\} \quad \quad \quad \{[\frac{17}{3} - t, \frac{19}{3} - t, t]\}$$

$$(o) \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned} \quad (p) \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$\quad \quad \quad \{\} \quad \quad \quad \{\}$$

**2.** Řešte soustavy lineárních rovnic, které jsou dány následujícími rozšířenými maticemi. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejich řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy.

$$(a) \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array} \right], \quad (b) \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -7 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \end{array} \right], \quad (c) \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right],$$

$$(d) \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 1 & 17 & 4 & -4 \end{array} \right], \quad (e) \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & -10 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right], \quad (f) \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 6 & -10 & 2 \end{array} \right]$$

$$(g) \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right], \quad (h) \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & -7 & 9 \end{array} \right], \quad (i) \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 3 \end{array} \right],$$

$$(j) \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

**ŘEŠENÍ:** (a)  $\{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]\}$ , (b)  $\{[-7 - 2t, t, 2]\}$ , (c)  $\{[-8, 4 + t, 8 + 2t, 1 + t]\}$ , (d)  $\{[-3 - 11t, -1 - t, 4 + 7t]\}$ , (e)  $\{[2 - 2s - 5t, s, 1 + t, 2t]\}$ , (f)  $\{[2t, -8 + 3t, t, 3]\}$ , (g)  $\{[1 + 3s - 2t, s, t]\}$ , (h)  $\{[-5 - 3t, 19 - 4t, -6 - 2t, t]\}$ , (i)  $\emptyset$ , (j)  $\{[-1, -2, 0]\}$ .

**3.** Určete množiny bodů, které jsou společné rovinám  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , které jsou dány obecnými rovnicemi:

$$a) \begin{array}{l} \alpha : 3x + y - z - 7 = 0 \\ \beta : x + 2y - 5z - 15 = 0 \\ \gamma : 3x + 5y + 2z - 9 = 0, \end{array} \quad b) \begin{array}{l} \alpha : x + y + z - 5 = 0 \\ \beta : 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ \gamma : 4x - y + 2z - 10 = 0, \end{array}$$

$$c) \begin{array}{l} \alpha : x + 2y + z - 1 = 0 \\ \beta : 3x - z - 6 = 0 \\ \gamma : 7x - 4y - 5z - 16 = 0, \end{array} \quad d) \begin{array}{l} \alpha : x - 2y + z - 1 = 0 \\ \beta : 2x - 4y + 2z - 2 = 0 \\ \gamma : -5x + 10y - 5z + 5 = 0. \end{array}$$

**4.** Řešte dané soustavy lineárních rovnic:

$$a) \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -4 \end{array} \quad b) \begin{array}{l} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad 5x - 2y + z = 4 \\ \quad \quad -x + 3y - 2z = -1 \\ \quad \quad 3x - 2y + 3z = 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \\ \text{d)} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ \quad \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 1 \\ \text{e)} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \quad \quad x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ \quad \quad 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ \text{f)} \quad x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ \quad \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 13 \\ \quad \quad 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7 \\ \quad \quad x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ \text{g)} \quad 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = -7 \\ \quad \quad 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -6 \\ \quad \quad x_2 - x_3 - x_4 = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ \text{h)} \quad 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ \quad \quad 6x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad \quad 2x_1 - 13x_2 + 40x_3 - 16x_4 = 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ \text{i)} \quad 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ \quad \quad 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ \quad \quad 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3 \\ \text{j)} \quad 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2 \\ \quad \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ \quad \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8 \\ \quad \quad 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{array}$$

**ŘEŠENÍ:**

(a)  $[-1, -1, 0, 1]$ ; (b)  $[1, 2, 1, -1]$ ; (c)  $[1, 2, 3]$ ; (d)  $[-2, 2, -3, 3]$ ; (e)  $\emptyset$ ; (f)  $[4 - t, \frac{2}{3}, t, -2t - \frac{7}{3}]$ ; (g)  $[-\frac{1017}{175} + 2t, -\frac{283}{175} + t, t, -\frac{8}{175}]$ ; (h)  $[1, 1, 1, 1]$ ; (i)  $[1, -1, 0, 2]$ ; (j)  $[2, 0, -2, -2, 1]$