Lineární algebra - KMA/LAZŽ

(celoživotní vzdělávání)

Roman HAŠEK

16. září 2016

Obsah

1 Lineární algebra

Slovo ALGEBRA pochází z arabského „al-jabr“, což znamená „nahrazení“. Toto slovo se objevilo v názvu knihy

Hisab al-džebr val-muqabala
(„Věda o redukci a vzájemném rušení“)

islámského matematika

Muhammada ibn Músá al-Chvárizmího
(790? - 850?, Chiva, Bagdád),

která je považována za vůbec první knihu o algebře.

Původně se jednalo o nauku o řešení rovnic. Dnešní algebra je daleko abstraktnější. Zabývá se studiem operací na množinách různých prvků a vlastnostmi **struktur**, které takto vznikají. Známými představiteli těchto struktur jsou **grupa** a **těleso**.

Základním rysem algebry je **označení studovaných objektů písmeny**. Tento formalismus navrhl *René Descartes* (1596 - 1650). Písmena ze začátku abecedy $(a, b, c, ...)$ měla reprezentovat libovolná čísla - parametry. Písmena z konce abecedy $(p, q, r, s, t, ..., x, y, z)$ pak měla představovat proměnné hodnoty konkrétních veličin (tlak, teplota, …, souřadnice).

Lineární algebra se zabývá vektory, maticemi, soustavami lineárních rovnic a vektorovými prostory.

2 Matice

Matice vznikly v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic. Pojem „matice“ (angl. matrix) zavedl v roce 1850 anglický matematik *James Joseph S* (1814–1897). Metoda řešení soustav odpovídající použití matic však byla známa již dlouho před tím[1].

Na řešení soustavy lineárních rovnic vede například úloha nalezení koeficientů tzv. *lineární kombinace vektorů.* Pojem *vektor* znáte ze střední školy - z fyziky, kde jste ho používali pro znázornění velikosti a směru vektorové veličiny (tzv. *fyzikální vektor*), a z geometrie, kde jste vektor používali k vyjádření směru a velikosti posunutí v tomto směru, např. při zápisu parametrických rovnic přímky (tzv. *geometrický vektor*). Pro ilustraci pojmu *lineární kombinace* nyní použijeme tzv. *aritmetický vektor*, tj. vektor jako uspořádanou $n-$tici reálných čísel. Později budeme využívat skutečnosti, že při zavedení souřadnicového systému existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi geometrickými a aritmetickými vektory.

Aritmetické vektory můžeme násobit reálným číslem (tak, že tímto číslem vynásobíme každý prvek vektoru), vektory se stejným počtem prvků pak můžeme sčítat (tak, že sčítáme sobě odpovídající prvky). Kombinace těchto dvou operací s vektory se nazývá *lineární kombinace vektorů.* Máme-li například tři vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o stejném počtu prvků, potom výraz $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$, kde $k, l, m \in R$, nazýváme *lineární kombinace vektorů* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *s koeficienty* k, l, m. Výsledkem lineární kombinace vektorů je opět vektor.

PŘÍKLAD 2.1. *Vytvořte lineární kombinaci* $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$ *pro vektory* $\vec{a} = (-2, 1, 5), \vec{b} = (2, 0, 3), \vec{a} = (1, -3, 9)$ *a koeficienty* $k = -3, l = 2, m = 4$.

PŘÍKLAD 2.2. *Určete koeficienty* $x, y, z \in R$, *pro které platí následující rovnost:* $x(2, 0, -1) + y(1, 3, 5) + z(0, 4, 3) = (3, 9, 2)$.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)

Řešení: Úloha vede na řešení soustavy lineárních rovnice

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 3y + 4z &= 9 \\ -x + 5y + 3z &= 2, \end{aligned}$$

kterou si můžeme schematicky zapsat pomocí tzv. *rozšířené matice soustavy*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Tu potom upravíme užitím tzv. *Gaussovy eliminace.* Této metodě se budeme detailně věnovat později (viz str. 26). Zde si pouze uvedeme jednu z možných posloupností vzájemně ekvivalentních matic, které vedou k příslušné matici v *Gaussově tvaru.* Zvídavý čtenář si pak sám může promyslet jednotlivé úpravy odpovídající uvedeným maticím.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 9 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

PŘÍKLAD 2.3. *Řešte v R^3 soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1, & \sqrt{2}, & 5, & -0.14 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definice 1 (Matice). *Matice je obdélníkové nebo čtvercové uspořádání prvků do řádků a sloupců.*

Typ matice

Matice A je typu $(3,3)$, matice B je typu $(3,1)$, matice C a E jsou typu $(3,4)$ a matice D je typu $(1,4)$.

Typ matice zapisujeme buď ve tvaru (m,n) nebo ve tvaru $m \times n$ (čteme „m krát n“). Je-li potřeba informovat o typu matice, zapisujeme $A_{(3,3)}$, $B_{(3,1)}$, $C_{(3,4)}$ nebo $A_{3\times 3}$, $B_{3\times 1}$, $C_{3\times 4}$.

Matice A je příkladem tzv. **čtvercové matice**. Konkrétně se jedná o čtvercovou matici řádu 3 (nebo 3. řádu, nebo 3. stupně).

Prvek matice

Jeho umístění v matici je udáno číslem řádku (index i) a číslem sloupce (index j).

Prvek matice A značíme a_{ij}, prvek matice M potom m_{ij}.

PŘÍKLAD 2.4. *Je dána matice*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Určete hodnoty prvků m_{21}, m_{22}, m_{12} této matice.

Prvkem matice může být číslo, funkce nebo klidně zase matice.

Zápis matice

K zápisu matic budeme používat hranaté nebo kulaté závorky:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Rovnými závorkami pak budeme značit **determinant matice**:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Symbolický zápis matice

Matice označujeme velkými písmeny, např. $A, B, M, N, ...$, jejich prvky potom odpovídajícími malými písmeny $a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, ...$.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Příklady matic: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 3+4i & 2-3i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1, 3, 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$.

Obdélníková matice $\quad m \neq n$

Čtvercová matice $\quad m = n$

Čtvercová matice typu (n, n) se nazývá **čtvercová matice $n-$tého řádu**.

Řádky a sloupce matice

Prvky matice jsou organizovány do řádků (řádkových vektorů) a sloupců (sloupcových vektorů).

$i-$tý řádek (řádkový vektor): $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) = a_i$

$j-$tý sloupec (sloupcový vektor): $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}) = \overline{a}_i$

PŘÍKLAD 2.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transponovaná matice k matici A: $\qquad A^T$

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}] .$$

PŘÍKLAD 2.6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hlavní diagonála matice

- je tvořena prvky se stejným číslem řádku a sloupce, tj. prvky a_{ii}.

Diagonální matice

- všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou rovny nule

PŘÍKLAD 2.7.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Většinou se pod pojmem diagonální matice rozumí matice čtvercová. Někdy se však tento pojem zobecňuje i na obdélníkové matice.

Jednotková matice

- diagonální matice se všemi prvky na hlavní diagonále rovnými jedné, tj. $a_{ii} = 1$.

PŘÍKLAD 2.8.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Jednotková matice je čtvercová. Je-li třeba, zapisujeme $I_{(n,n)}$ nebo $I_{n\times n}$, např. $I_{3\times 3}$.

Trojúhelníková matice

$$\text{horní: } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{dolní: } \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Trojúhelníková matice je čtvercová.

Symetrická matice: $\quad a_{ij} = a_{ji}, \quad$ tj. $\quad A^T = A$

PŘÍKLAD 2.9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Symetrická matice je čtvercová.

PŘÍKLAD 2.10. *Zápis kuželosečky* $x^2 + 6xy + 9y^2 + 2y - 1 = 0$ *pomocí (symetrické) matice:*

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Antisymetrická matice: $\quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad$ tj. $\quad A^T = -A$

PŘÍKLAD 2.11.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

PŘÍKLAD 2.12. *Matice otočení kolem počátku o úhel* α*:*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Nulová matice: $a_{ij} = 0$

PŘÍKLAD 2.13.

$$O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1 Cvičení - Užití matic při řešení soustav lineárních rovnic

Lineární kombinace vektorů

1. Vytvořte uvedenou lineární kombinaci s danými vektory a koeficienty.

a) $k\vec{a} + l\vec{b}$; $\quad \vec{a} = (1,3,0), \vec{b} = (-2,0,4); k = 1, l = 5,$

b) $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$; $\quad \vec{a} = (2,10), \vec{b} = (-1,5), \vec{c} = (9,-7); k = 4, l = 3, m = -2,$

c) $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$; $\quad \vec{a} = (4,3,-2), \vec{b} = (0,2,-1), \vec{c} = (3,1,-7); k = 2, l = -3, m = 5,$

d) $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$; $\quad \vec{a} = (1,0,2), \vec{b} = (0,1), \vec{c} = (3,1,0); k = 7, l = 4, m = -2.$

2. Určete koeficienty příslušné lineární kombinace tak, aby platila uvedená rovnost.

a) $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{o}$; $\quad \vec{a} = (1,3), \vec{b} = (-2,6), \vec{o} = (0,0)$ (*nulový vektor*),

b) $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{d}$; $\quad \vec{a} = (1,0,1), \vec{b} = (0,1,-1), \vec{c} = (1,1,0), \vec{d} = (1,2,1).$

Soustavy lineárních rovnic

1. Řešte dané soustavy v R^2 (R^3)

(a) $\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x - 5y &= 2 \end{aligned}$

(e) $x + 2y - z = 3$ (f) $x + y = 1$ (g) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 5 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$

(h)
$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 2 \\ 4x + 3y - z &= 3 \\ 8x + 6y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

(j)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 9 \\ x - y + z &= 2 \\ x - 4y + 2z &= -3 \end{aligned}$$

Úlohy na další procvičení

2. Řešte dané soustavy v R^2 (R^3, R^4)

(a)
$$\begin{aligned} 2x - 6y &= 4 \\ -x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 5x - 15y &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} p + q - r &= 0 \\ 2p - q + 3r &= 3 \\ -p - q &= 6 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2u - v + 2w &= 2 \\ -u - v + 3w &= 1 \\ 3u - 2w &= 1 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x + z - 2w &= -3 \\ 2x - y + 2z - w &= -5 \\ -6y - 4z + 2w &= 2 \\ x + 3y + 2z - w &= 1 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 7z &= 15 \end{aligned}$$

Domácí úkol

Příklad 1: Řešte dané soustavy v R^2 (R^3, R^4)

(a)
$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 6u + v &= 5 \\ 3u - 2v &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$x + 2y = 3$$

(d)
$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x + 2y &= 9 \\ 2x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} p + q - r &= 0 \\ 2p - q + 3r &= 3 \\ -p - q &= 6 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} 2u - v + 2w &= 2 \\ -u - v + 3w &= 1 \\ 3u - 2w &= 1 \end{aligned}$$

Příklad 2: Určete hodnoty koeficientů a, b a c tak, aby soustava rovnic $ax + by + cz = 3$, $ax - y + cz = 1$, $x + by - cz = 2$ měla řešení $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

Příklad 3: Jaká množství 20% a 60% alkoholu musíme smísit, abychom dostali 50 litrů 30% alkoholu?

Příklad 4: Výlet lodí po proudu řeky do místa vzdáleného 75 km trvá 3 hodiny, zpáteční cesta proti proudu pak trvá 5 hodin. Určete průměrnou rychlost lodi vzhledem ke klidné vodě a průměrnou rychlost vody tekoucí v řece.

3 Algebraické operace s maticemi

3.1 Rovnost matic

$$A = B$$

Dvě matice se rovnají, jsou-li téhož typu a rovnají-li se jejich vzájemně si odpovídající prvky, tj. $a_{ij} = b_{ij}$.

PŘÍKLAD 3.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.2 Sčítání matic

$$A + B$$

Odčítání matic $A - B$ definujeme pomocí ščítání a opačné matice k B:

$$A - B = A + (-B).$$

Sčítat (odčítat) můžeme pouze matice téhož typu. Výsledkem je matice, jejíž prvky jsou součtem (rozdílem) vzájemně si odpovídajících prvků daných matic.

PŘÍKLAD 3.2. *Sčítání a odčítání matic:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ NELZE,

d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ NELZE.

Vlastnosti operace sčítání matic na množině matic typu (m, n):

i) neomezeně definovaná,

ii) komutativní

$$A + B = B + A,$$

iii) asociativní

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

iv) s neutrálním prvkem (nulová matice)

$$A + O = O + A = A.$$

v) s inverzními prvky (opačné matice)

$$A + (-A) = O.$$

Množina $M_{(m,n)}$ matic typu (m, n) tvoří spolu s operací sčítání matic **komutativní grupu**, zapisujeme $(M_{(m,n)}, +)$.

3.3 Násobení matice reálným číslem

$$k \cdot A,\ k \in R$$

Číslem k násobíme každý prvek matice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ k \in R,\ \text{potom k} \cdot \text{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$$

PŘÍKLAD 3.3.

a) $2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 14 \\ -16 & 18 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 5 & 35 & 10 \\ 15 & 20 & 80 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 16 \end{bmatrix}$.

PŘÍKLAD 3.4. *Vypočtěte:*

$$-3\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vlastnosti operace násobení matice reálným číslem (skalární násobení matice):

i) neomezeně definovaná,

ii) komutativní

$$kA = Ak,$$

iii) asociativní

$$k(lA) = (kl)A,$$

iv) distributivní

$$k(A + B) = kA + kB,$$

$$(k+l)A = kA + lA,$$

v) s jednotkovým prvkem (skalárem)

$$1A = A,$$

vi) násobení -1 (vznikne matice opačná):

$$(-1)A = -A,$$

vii) násobení 0 (vznikne matice nulová):

$$0A = O_{(m,n)}.$$

PŘÍKLAD 3.5. *Vypočtěte hodnotu výrazu (výsledkem je matice)* $2A + 3B$, *jsou-li dány matice:* $A = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

PŘÍKLAD 3.6. *Zjednodušte výraz:* $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

PŘÍKLAD 3.7. *Pro* $A = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 20 & 0 \\ -20 & 13 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ *určete* $A + 2(B - 2C)$

PŘÍKLAD 3.8. *Pro* $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ *určete neznámou matici* X *v rovnici* $X + A = 0$.

3.4 Cvičení - Maticové operace

1. Pro následující matice určete hodnoty parametrů a, b a c, tak, aby platilo $A = B$:

a) $A = \begin{bmatrix} a^2 & 1 & c \\ 2 & 3 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -a & 1 & 4 \\ 2 & b & -1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ a & 2 & 4 \\ 9 & 1 & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \\ b & 1 & 2 \\ 1+a & 2+c & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3+a & 2 \\ 1+b & a & 5 \\ b^2 & 1 & a^2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & c \\ 4 & a & 5 \\ b^2 & 1 & a^2 \end{bmatrix}$.

2. Určete hodnoty všech uvedených neznámých:

a) $\begin{bmatrix} x-3 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ y \\ z+4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x+y & 1 \\ 0 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

3. Určete hodnoty neznámých x, y v níže uvedených rovnicích, jestliže a, b, c a d jsou reálná čísla různá od nuly:

a) $\begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} ax+y \\ bx+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} ax+b & cy+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Pro uvedené matice A, B vypočítejte lineární kombinace s koeficienty k, l v uvedeném pořadí:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $k = 1$, $l = 3$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $k = -1$, $l = 2$.

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $k = 4$, $l = -2$.

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $k = -3$, $l = 3$.

5. Řešte uvedené maticové rovnice pro neznámou matici X.

a) $X + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, b) $X + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $X + 3\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$, d) $X - \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,

6. Jsou dány matice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice (tzv. maticová rovnice):

a) $2X - A = B$, b) $X + 2B + A = I$, c) $B^T - 2I = A + X$,

d) $X - A^T = 3B - 2X - A$, e) $3X + B^T = 2A + X - B$,

7. Jsou dány matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice: $2(I - X) + A^T = 2A + 3(X - B + 2C)$,

3.5 Násobení matic

Skalární součin vektorů

Přesněji *Eukleidovský skalární součin.* Uvažujme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Potom jejich skalárním součinem rozumíme operaci, jejímž výsledkem je číslo (skalár) a která je dána předpisem:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n.$$

PŘÍKLAD 3.9. *Uvažujme vektory* $\vec{u} = (1, 5, 3)$, $\vec{v} = (0, -2, 1)$, $\vec{w} = (7, 2)$. *Potom*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -7$$

ale součiny $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ *nemají smysl.*

Poznámky. Skalární součin

1) Skalárně lze násobit pouze vektory se stejným počtem prvků, tj. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 5, 3) \cdot (7, 2)$ nemá smysl.

2) Výsledkem skalárního součinu je reálné číslo (skalár).

3) Skalární součin souvisí s odchylkou (úhlem) φ příslušných dvou vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\varphi$$

Potom

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Násobení matic

$$A \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Poznámky. Násobení matic

1) Ne každé dvě matice lze násobit. Například pro matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ má smysl násobení v pořadí $B \cdot A$, ale v pořadí $A \cdot B$ je násobit nelze. Nabízí se otázka „Jak poznáme, zda jsou dvě matice v příslušném pořadí násobitelné?“ Lze využít jejich typy. Například násobení

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

můžeme napsat pomocí typů zúčastněných matic takto:

$$(2, 2) \cdot (2, 3) = (2, 3).$$

Porovnejme tento zápis se zápisem násobení

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

které nemá smysl:

$$(2, 3) \cdot (2, 2).$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je jistě již zřejmá.

2) Násobení matic není komutativní.

PŘÍKLAD 3.10. *Pro matice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ *platí:*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 11 & 26 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}.$$

PŘÍKLAD 3.11. *Jsou dány matice* $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$. *Dokažte:*

a) $AB = BA$, *b)* $AC \neq CA$,

c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, *d)* $(A+C)^2 \neq A^2 + 2AC + C^2$.

Vlastnosti operace násobení matic (za předpokladu, že je pro dané matice definováno):

i) asociativní

$$(AB)C = A(BC),$$

ii) $(+, \cdot)-$distributivní

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC,$$

iii) jednotková matice (značíme ji I nebo E)

$$AI = IA = A,$$

iv) nulová matice

$$AO = O, \; OA = O.$$

3.6 Cvičení - Násobení matic

1. Pro následující dvojice matic určete součin AB :

a) $A = \begin{bmatrix} 1, & -4, & 2, & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2, & 1, & -1, & 2 \end{bmatrix}^T$, b) $A = \begin{bmatrix} 2, & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3, & -5 \end{bmatrix}^T$,

c) $A = \begin{bmatrix} 4, & 1, & 7, & 5, & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3, & -1, & 0, & 1, & 4 \end{bmatrix}^T$,

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$, e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Určete součin AB a, pokud existuje, také součin BA :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1, & 4, & 5, & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2, & -5, & 3, & 2 \end{bmatrix}^T$,

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Ukažte, že pro dané matice A, B platí $(AB)^T = BA$:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Na daných maticích ukažte, že platí $(AB)^T = B^T A^T$:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Ověřte platnost vztahu $(ABC)^T = C^T B^T A^T$:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

4 Hodnost matice

PŘÍKLAD 4.1. *Řešte v R^3 soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Řešení:

Metoda sčítací	**Metoda maticová**
Soustavu převedeme na trojúhelníkový tvar:	Použijeme Gaussovu eliminaci:
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2y - z &= 3 \\ -y + 3z &= 1 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ 5z &= 5 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$
$[x, y, z] = [-3, 2, 1]$	*Gaussův tvar matice*

4.1 Gaussova eliminační metoda

- metoda řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých užitím matic. Je založena na vytváření posloupnosti navzájem ekvivalentních matic (tj. jim odpovídající soustavy mají stejná řešení), která končí maticí v tzv. Gaussově tvaru. K tomu používáme následující ekvivalentní úpravy matic.

Ekvivalentní úpravy matic

1) Vzájemné prohození dvojice řádků matice.

2) Vynásobení řádku matice nenulovou konstantou (reálným číslem).

3) Přičtení (odečtení) násobku řádku matice k jinému řádku.

4) Odstranění nulového řádku.

Cílem postupného provádění těchto ekvivalentních úprav je:

Matice v Gaussově tvaru

- matice, u které na každém řádku přibyde zleva alespoň jedna nula oproti řádku předchozímu.

Příklady matic v Gaussově tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Příklady matic, které nejsou v Gaussově tvaru:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekvivalentní matice

Dvě matice, z nichž jedna vznikla z druhé výše uvedenými úpravami, nazýváme ekvivalentní. Soustavy rovnic, příslušné těmto dvěma maticím, mají stejná řešení. Ekvivalenci matic A, B značíme takto:

$$A \sim B.$$

4.2 Hodnost matice A

- číslo, které je rovno počtu řádků matice v Gaussově tvaru (mějme na paměti, že nulové řádky nepočítáme), která je s maticí A ekvivalentní. Hodnost matice A značíme

$$h(A).$$

Po zavedení pojmů „vektorový prostor“ a „dimenze“ budeme hodnost matice definovat jako **dimenzi vektorového prostoru generovaného řádkovými (sloupcovými) vektory matice**.

PŘÍKLAD 4.2. *Určete hodnost matice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Pro hodnost matice typu (m, n) platí:

$$h(A) \leq \min(m, n).$$

PŘÍKLAD 4.3. *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \end{array}\right] \sim .$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 120 & 120 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim .$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Pokud pokračujeme v ekvivalentních úpravách i po dosažení Gaussova tvaru, s cílem dostat nuly i nad hlavní diagonálou a v hlavní diagonále samé jedničky, provádíme tzv. **Gauss-Jordanovu eliminaci**. Tu lze použít k řešení soustavy, která má právě jedno řešení. Toto řešení (v našem příkladě uspořádanou trojici hodnot $[x, y, z] = [3, 1, 1]$) najdeme v posledním sloupečku matice v **Gauss-Jordanově tvaru** (viz červeně zvýrazněné hodnoty).

4.3 Cvičení - Hodnost matice

1. Určete hodnosti daných matic:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\{3\}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$; $\{2\}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$; $\{2\}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$; $\{2\}$, e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & -14 & 28 & 7 \end{bmatrix}$; $\{2\}$, f) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; $\{3\}$,

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -7 & 8 & 14 \\ 4 & 3 & -2 & -6 \\ -3 & -5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$; $\{3\}$, h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 56 & 11 \\ 6 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$; $\{3\}$, i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\{3\}$,

j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\{5\}$, k) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\{3\}$.

2. Dané soustavy řešte Gaussovou (Gaussovou–Jordanovou) eliminací:

a) $\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 5 \\ 4x + y \phantom{{}+3z} &= 13, \\ 3x + \phantom{y+{}} 4z &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= 2\,, \\ x - y - z &= 10 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ -x + y \phantom{{}-z} &= 5, \\ x \phantom{{}+2y} + 2z &= 6 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 9 \\ 3x + y \phantom{{}+z} &= 1, \\ -2x - 3y - z &= 0 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 3y + 4z &= 2, \\ -3x - 5y + 2z &= 4 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ 4x \phantom{{}+y} + 3z &= 5, \\ 3x + 2y \phantom{{}+3z} &= 1 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 5 \\ 3x - y \phantom{{}-2z} &= 1\,. \\ 5x \phantom{{}-y} + 4z &= -2 \end{aligned}$

5 Různé zápisy soustavy lineárních rovnic

PŘÍKLAD 5.1. *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12. \end{aligned}$$

i) Přímý zápis

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12. \end{aligned}$$

ii) Zápis formou rozšířené matice soustavy

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

Obecně: $\overline{A} = \left[\, A \,\middle|\, B \,\right]$, kde A je matice soustavy a B je matice (sloupcový vektor) pravých stran.

iii) Zápis užitím násobení matic

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Obecně: $A \cdot X = B$, kde X je matice (sloupcový vektor) neznámých.

iv) Zápis jako lineární kombinace sloupcových vektorů matice A

$$x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ rozumíme výraz (vektor)

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n,$$

kde $k_1, k_2, ..., k_n$ jsou reálná čísla, kterým říkáme **koeficienty** lineární kombinace.

PŘÍKLAD 5.2. *Jsou dány vektory* $\vec{a} = (1, 2, 5)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, $\vec{c} = (4, 1, 1)$. *Určete vektor*

$$5\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c},$$

který je jejich lineární kombinací.

6 Aplikace Gaussovy eliminace

6.1 Regulární matice

Čtvercovou matici A nazýváme **regulární**, právě když je její hodnost $h(A)$ rovna jejímu stupni, tj. platí:

$$h(A) = n.$$

PŘÍKLAD 6.1. *Která z následujících matic je regulární?*

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, *b)* $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$,

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, *d)* $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme **singulární**.

6.2 Inverzní matice

Nechť A je čtvercová matice stupně n. Matice X téhož stupně se nazývá **inverzní maticí k matici** A, jestliže platí

$$X \cdot A = A \cdot X = I,$$

kde I je jednotková matice stupně n. Inverzní matici značíme

$$A^{-1}.$$

PŘÍKLAD 6.2. *Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Řešení: Neznámou matici X můžeme zapsat obecně takto:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Potom lze rovnici (1) psát ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kterému odpovídají následující dvě soustavy, lišící-se jenom pravými stranami:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 3x_3 & = & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_4 & = & 0 \\ 4x_2 + 3x_4 & = & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Tyto soustavy řešíme najednou, pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace jedné společné „rozšířené“ matice:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Potom:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Ze zadání příkladu je zřejmé, že nalezená matice X je matice inverzní k matici A.

ÚKOL: Ověřte, zda platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Poznámka. Regulární matice

Regulární matici charakterizujeme také jako čtvercovou matice, k níž **existuje matice inverzní**. V opačném případě hovoříme o matici **singulární**.

Jednoznačnost existence inverzní matice

Nabízí se otázka, zda může k dané regulární matici existovat více navzájem různých inverzních matic. Odpovědí je, že ne. „Pokud k matici A existuje inverzní matice, je jediná.“

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existují dvě matice B a C, které splňují definici inverzní matice k A, tj. $AB = BA = I$ a $AC = CA = I$. Potom ale $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$, což je spor. Předpoklad tedy není správný, existuje jediná inverzní matice k A (pokud existuje).

Výpočet inverzní matice

Při výpočtu inverzní matice k A budeme využívat následující vlastnost:

„Jestliže A je regulární matice a pro matici X platí buď $AX = I$ nebo $XA = I$, je X maticí inverzní k A, tj. $X = A^{-1}$.“

Při důkazu uvedené vlastnosti předpokládáme platnost vztahu $AX = I$ a snažíme se dokázat platnost vztahu $XA = I$. Přitom ještě využijeme definici inverzní matice. Platí $XA = IXA = (A^{-1}A)XA = A^{-1}(AX)A = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$.

Výpočet inverzní matice užitím Gauss26ovy-Jordanovy eliminace:

$$\left[\, A \,\middle|\, I \,\right] \sim \ldots \sim \left[\, I \,\middle|\, A^{-1} \,\right].$$

PŘÍKLAD 6.3. *Určete inverzní matici k matici*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pro regulární matice A, B téhož stupně platí:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{2}$$

ÚKOL: Ukažte platnost vlastnosti (2) na příkladu matic:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Vlastnost podobná (2) platí i pro **transponované matice**, tj.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \tag{3}$$

ÚKOL: Ukažte platnost této vlastnosti na příkladu matic:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6.3 Maticové rovnice

PŘÍKLAD 6.4. *Jsou dány matice* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Najděte neznámou matici X tak, aby platilo:*

$$\text{a) } AX = B,$$

$$\text{b) } XA = B.$$

6.4 Lineární závislost vektorů

Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ nazýváme lineárně závislé právě tehdy, když lze jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, tj. když existuje takové $k \in \{1, 2, ..., n\}$, pro které lze vektor $\vec{v}_k$ zapsat takto:

$$\vec{v}_k = c_1\vec{v}_1 + c_1\vec{v}_1 + ... + c_{k-1}\vec{v}_{k-1} + c_{k+1}\vec{v}_{k+1} + ... + c_n\vec{v}_n,$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n \in R$.

PŘÍKLAD 6.5. *Zjistěte, který z vektorů* $\vec{a}_1 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 5, 5, 1$ *je lineární kombinací vektorů* $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\vec{a}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

PŘÍKLAD 6.6. *Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé. Po zjištění lineární závislosti určete tu jejich lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.*

a) $\vec{a} = (2, 5, 7)$, $\vec{b} = (6, 3, 4)$, $\vec{c} = (5, -2, 3)$,

b) $\vec{a} = (6, 4, 2)$, $\vec{b} = (-9, 6, 3)$, $\vec{c} = (-3, 6, 3)$.

c) $\vec{a} = (-1, 0, 3)$, $\vec{b} = (4, 2, 0)$, $\vec{c} = (-5, -1, 9)$.

d) $\vec{a} = (1, 3, 5)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$,

e) $\vec{a} = (3, -8, 1)$, $\vec{b} = (-6, 16, -2)$,

f) $\vec{a} = (3, 2, 7)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (2, 0, 3)$,

g) $\vec{a} = (3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (5, 4, 2)$,

h) $\vec{a} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{c} = (3, 2, 1, 1)$,

i) $\vec{a} = (3, 0, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 0, 3)$, $\vec{d} = (1, 0, 3, 0)$.

6.5 Cvičení

1. Určete inverzní matice k daným maticím:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{f)} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Dané soustavy řešte užitím inverzní matice:

$$\text{a)} \begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ x + 2y - z & = & 3 \\ 2x + y + z & = & 12. \end{array}, \qquad \text{b)} \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 3 \\ x - z & = & 1 \\ 2y + z & = & 7. \end{array}$$

3. Vypočtěte matici X z rovnice:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)}\ X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. K daným maticím A, B vypočtěte A^{-1}, B^{-1}, $B^{-1}A^{-1}$ a $(A \cdot B)^{-1}$ a součiny $B^{-1}A^{-1}$ a $(A \cdot B)^{-1}$ vzájemně porovnejte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

7 Determinant matice

Determinant určujeme jenom u čtvercových matic.

PŘÍKLAD 7.1. *Řešte soustavu rovnic*

$$x - y = 1 \tag{4}$$
$$2x + 3y = 5. \tag{5}$$

Řešení: Soustavu řešíme například sčítací metodou. Po odečtení dvojnásobku (6) od rovnice (7) dostaneme $y = \frac{3}{5}$. Dosazením do první rovnice pak dostaneme $x = \frac{8}{5}$.

PŘÍKLAD 7.2. *Řešte soustavu rovnic*

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \tag{6}$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2. \tag{7}$$

Řešení: Za předpokladu, že výraz $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ je různý od nuly, dostáváme toto řešení:

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

7.1 Užití determinantů při řešení soustavy lineárních rovnic

Cramerovo pravidlo

Dané soustavě dvou rovnic o dvou neznámých přiřadíme následující tři čtvercové matice a u každé z nich vypočítáme její determinant:

1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ … matice soustavy

Při výpočtu determinantu této (i dalších dvou) matice uplatníme tzv. **křížové pravidlo**, které usnadňuje výpočet determinantu u matic druhého řádu:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2. $A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}$ … matice soustavy, u níž je **první sloupec nahrazen** sloupcovým vektorem pravých stran rovnic $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

$$\det A_1 = b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2$$

3. $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$ … matice soustavy, u níž je **druhý sloupec nahrazen** sloupcovým vektorem pravých stran rovnic $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$:

$$\det A_2 = a_{11} \cdot b_2 - a_{12} \cdot b_2$$

Řešení dané soustavy lze potom, za předpokladu, že $\det A \neq 0$, zapsat ve tvaru

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}.$$

Aplikací uvedeného postupu na Příklad 7.1 dostaneme výsledky, které odpovídají jeho výše uvedenému řešení:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{3}{5}.$$

Tato metoda není spojena jenom se soustavou dvou rovnic o dvou neznámých. Lze ji použít při řešení jakékoliv (regulární) soustavy n lineárních rovnic o n neznámých. Této metodě řešení regulárních soustav se říká Cramerovo pravidlo. Obecně ji lze zapsat takto:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}; \quad \det A \neq 0.$$

PŘÍKLAD 7.3. *Vypočtěte obsah rovnoběžníku, který je určen vektory* $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$.

PŘÍKLAD 7.4. *Vypočtěte obsah rovnoběžníku, který je určen vektory* $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 5)$.

7.2 Zápis determinantu

Uvažujme matici druhého řádu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, potom determinant matice A zapíšeme ve tvaru

$$\det A \qquad \text{nebo} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

V případě matice řádu 2 pak již víme, že $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$,

7.3 Výpočet determinantu

Determinant je definován (Def.2) pro čtvercové matice všech řádů stejně. Pro matice řádů 1, 2, 3 a 4 se ale liší obvyklé způsoby jeho výpočtu. Nyní se s nimi seznámíme.

1. Matice řádu $n = 1$:

$$A = [a_{11}]\,, \qquad \text{potom} \qquad \det A = a_{11}.$$

2. Matice řádu $n = 2$: **KŘÍŽOVÉ PRAVIDLO**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{potom} \qquad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

3. Matice řádu $n = 3$: **SARRUSOVO PRAVIDLO**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

potom

$$\begin{aligned} \det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - \\ -(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}). \end{aligned}$$

Výpočet determinantu matice 3. řádu si usnadníme uplatněním následujícího schématického postupu:

$$A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Nejprve násobíme prvky matice v následujících třech liniích rovnoběžných s hlavní diagonálou a tyto součiny sečteme:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right., \quad \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right., \quad \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Tak dostaneme výraz

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \tag{8}$$

Potom opakujeme stejný postup pro následující tři směry rovnoběžné s druhou diagonálou:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & \boxed{a}_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a}_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ \boxed{a}_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boxed{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a}_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & \boxed{a}_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & \boxed{a}_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxed{a}_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a}_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Výsledkem je výraz

$$(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \tag{9}$$

Determinant matice A je potom roven rozdílu výrazů 8 a 9:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}).$$

4. Matice řádu $n > 3$: ROZVOJ DETERMINANTU

Rozvoji determinantu a jeho použití se zevrubně věnují kapitoly 7.7, 7.8.

Poznámka. Tato metoda výpočtu determinantu je použitelná pro matici jakéhokoliv řádu. Pro řády $n \leq 3$ však většinou volíme speciální metody uvedené výše.

5. TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE

Pro čtvercové matice libovolného stupně, které mají pod nebo nad hlavní diagonálou samé nuly je determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále.

PŘÍKLAD 7.5. *Vypočtěte determinant matice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

PŘÍKLAD 7.6. *Vypočtěte determinanty těchto matic:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

7.4 Permutace množiny

PŘÍKLAD 7.7. *Vypočtěte následující determinanty. Hledejte společné rysy výrazů pro hodnoty determinantů matic 2. a 3. stupně. Potom se pokuste definovat determinant.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \ldots, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots$$

Poznatek z řešení příkladu 7.7:

Determinant matice je tvořen všemi takovými součiny, že z každého řádku a z každého sloupce matice je v každém z nich obsažen právě jeden prvek.

Těchto součinů je $n!$ (n faktoriál), kde n je stupeň matice. Část z nich je uvedena znaménkem „-“, část pak znaménkem „+“.

K vyslovení úplné definice determinantu zbývá už jenom říci, že o tomto znaménku rozhoduje pořadí, v jakém vybíráme činitele příslušného součinu z jednotlivých sloupců. Jedná se o **znaménko permutace sloupcových indexů**.

Řešení příkladu 7.7 můžeme zapsat takto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+ (-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

kde exponenty u -1 vyjadřují počet inverzí v odpovídajících permutacích sloupcových indexů. Znaménko mocniny pak odpovídá znaménku těchto permutací.

7.4.1 Permutace množiny

Permutací množiny M rozumíme každé vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M na sebe.

Uvažujme například množinu $M = \{1, 2, 3\}$. Potom zobrazení f, pro které platí $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, je permutací.

Permutace množiny M představuje určité uspořádání jejích prvků. To známe z kombinatoriky. Víme, že počet všech permutací $n-$prvkové množiny je roven $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (tj. n faktoriál).

Permutaci obvykle **značíme** písmenem π. Symbolicky ji můžeme zapsat jako zobrazení

$$\pi : M \to M.$$

Konkrétní permutace množiny $M = \{1, 2, 3\}$ zapisujeme takto:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad ...$$

Potom pro obrazy prvků množiny M platí například, že $\pi_1(2) = 2$, $\pi_2(1) = 3$, $\pi_3(2) = 3$ apod.

Poznámka. Množina všech permutací množiny M spolu s operací skládání permutací (tj. skládání zobrazení, protože permutace je zobrazení) tvoří grupu. Ukažte to na příkladě. Je tato grupa komutativní?

Obecnou permutaci na množině $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$ zapíšeme takto:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & ... & r_n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

potom pro obraz prvku i množiny M platí

$$\pi(i) = r_i.$$

Inverze

Inverzí permutace π rozumíme dvojici obrazů r_k, r_l v matici (10), níž je větší číslo před menším, tj. $r_k > r_l$. Přitom tato čísla nemusí být v zápise permutace vedle sebe.

Pokud tedy v zápise permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k & ... & l & ... & n \\ r_1 & r_2 & ... & r_k & ... & r_l & ... & r_n \end{pmatrix}$$

je $r_k > r_l$, **tvoří tato dvě čísla jednu inverzi**.

Znaménko permutace

Znaménkem znπ (nebo sgnπ) permutace π rozumíme hodnotu výrazu $(-1)^k$, kde k je počet všech **inverzí** permutace π. Zapisujeme

$$\text{zn}\pi = (-1)^k.$$

Permutaci o sudém počtu inverzí nazýváme **sudou permutací**. Permutaci o lichém počtu inverzí pak nazýváme **lichou permutací**. Hodnotu funkce znπ nazýváme **paritou** permutace. Sudá permutace má paritu $+1$, lichá potom -1.

Příklady permutací a určení jejich znamének:

a) Permutace π_1 na množině $M = \{1, 2, 3\}$:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \qquad \text{zn}\pi_1 = (-1)^1 = -1.$$

b) Permutace π_2 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k = 3, \qquad \text{zn}\pi_2 = (-1)^3 = -1.$$

c) Permutace π_3 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 4, \qquad \text{zn}\pi_3 = (-1)^4 = 1.$$

PŘÍKLAD 7.8. *Determinant matice druhého řádu:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Jedna inverze v pořadí, proto znaménko minus.

7.5 Definice determinantu

Definice 2 (DETERMINANT)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice $n-$tého řádu nad tělesem T. Determinantem matice A rozumíme prvek tělesa T ve tvaru:*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{zn}\pi \cdot a_{1r_1} \cdot a_{2r_2} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace π množiny $1, 2, 3, ..., n$. Množina těchto permutací je označena symbolem S_n.

PŘÍKLAD 7.9.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+(-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

7.6 Pravidla o počítání s determinanty

Pro počítání s determinanty platí následující pravidla. Tato pravidla se běžně uvádějí ve formě věty (nebo jednotlivých vět). Důkaz pak vesměs vychází z uvedené definice determinantu. My se zde spokojíme se seznamem těchto pravidel, doplněným ilustračními příklady.

1. Zaměníme-li vzájemně dva řádky (sloupce), změní determinant své znaménko.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

2. Jsou-li všechny prvky jednoho řádku (sloupce) rovny nule, je determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot(-3)+3\cdot0\cdot1)-(3\cdot0\cdot(-3)+2\cdot0\cdot1+1\cdot0\cdot1) = 0$$

3. Obsahuje-li matice dva stejné řádky (sloupce), je její determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1\cdot2\cdot6+2\cdot3\cdot4+3\cdot1\cdot5)-(3\cdot2\cdot4+2\cdot1\cdot6+1\cdot3\cdot5) = 0$$

4. Je-li řádek (sloupec) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (1\cdot2\cdot k\cdot6+2\cdot3\cdot k\cdot4+3\cdot1\cdot k\cdot5)- \\ &-(3\cdot2\cdot k\cdot4+2\cdot1\cdot k\cdot6+1\cdot3\cdot k\cdot5) \\ &= 1\cdot2\cdot k\cdot6+2\cdot3\cdot k\cdot4+3\cdot1\cdot k\cdot5- \\ &-3\cdot2\cdot k\cdot4-2\cdot1\cdot k\cdot6-1\cdot3\cdot k\cdot5 = 0, \end{aligned}$$

Poznámka. Z porovnání posledních dvou příkladů plyne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Jedná se o projev následující vlastnosti determinantů.

5. Násobíme-li prvky jednoho řádku (sloupce) nějakým číslem, násobí se tímto číslem celý determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -26 = -2 \cdot 13.$$

Důsledky:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$

(ii) $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$, kde n je stupeň matice A.

6. Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců).

Důsledek:

Možnost užití Gaussovy eliminace při výpočtu determinantu.

PŘÍKLAD 7.10. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -3.$$

PŘÍKLAD 7.11. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

7. Determinant matice transponované je stejný jako determinant matice původní.

$$\det A = \det A^T$$

8. Determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů jednotlivých matic (Cauchyho věta).

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důsledky:

(i) $A \cdot B \neq B \cdot A$, ale

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A).$$

(ii) $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \quad \wedge \quad \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$, potom platí

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Poznámka. Pro čtvercovou matici A stupně n platí, že následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $h(A) = n$, (ii) $\det A \neq 0$, (iii) A je **regulární**.

7.7 Věta o rozvoji determinantu

Definice 3 (Algebraický doplněk prvku matice)**.** *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Determinant matice, která vznikne z A vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce nazveme* **subdeterminantem** *a značíme M_{ij}. Číslo*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

nazveme **algebraickým doplňkem** *prvku a_{ij}.*

Definice 4 (Rozvoj determinantu)**.** *Je-li čtvercová matice řádu $n \geq 2$, pro každé $i = 1, 2, ..., n$ definujeme rozvoj matice A podle $i-$tého řádku jako výraz*

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$$

a pro každé $j = 1, 2, ..., n$ definujeme rozvoj matice A podle $j-$tého sloupce

$$a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Hodnoty těchto rozvojů jsou nezávislé na volbě řádku nebo sloupce a jsou ve všech případech rovny hodnotě determinantu matice A.

Věta 1 (O rozvoji determinantu - podle $i-$tého řádku)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice stupně n. Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Věta 2 (O rozvoji determinantu 2 - podle $i-$tého sloupce)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice stupně n. Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{kj} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde δ_{ij} *je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí:* $\delta_{ij} = 1$ *pro* $i = j$ *a* $\delta_{ij} = 0$ *pro* $i \neq j$.

Důkaz. - naznačení důkazu věty o rozvoji podle $i-$řádku na příkladu matice 3. řádu a jejího rozvoje podle druhého řádku.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^3 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

$\square$

Poznámka. Z uvedených vět plynou následující vztahy, které pro nás budou zanedlouho důležité:

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + ... + a_{n1}A_{n2} = 0, \quad \text{pro } i \neq j, \tag{11}$$

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + ... + a_{n2}A_{n2} = \det A, \quad \text{pro } i = j. \tag{12}$$

7.8 Výpočet determinantu matice stupně $n > 3$

Využíváme tyto dvě metody:

1. Rozvoj determinantu podle řádku (sloupce).

2. Převedení matice na trojúhelníkový tvar užitím Gaussovy eliminace (při respektování vlivu úprav matice na hodnotu determinantu).

Poznámka. Většinou uvedené metody kombinujeme. Nejprve vhodnou manipulací s řádky (sloupci) zajistíme sloupec (řádek) s jediným nenulovým prvkem (aby měl příslušný rozvoj jenom jeden člen). Potom podle něj provedeme rozvoj.

Upozornění: Je třeba neustále myslet na to, jak příslušná manipulace s řádky (sloupci) mění hodnotu (třeba jenom znaménko) determinantu matice.

PŘÍKLAD 7.12. *Vypočtěte determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix}.$$

7.9 Cvičení

1. Vypočtěte determinanty následujících matic. O správnosti výsledku se přesvědčte užitím nějakého počítačového programu, například wxMaxima, Maple nebo Derive.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -8 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{bmatrix}$,

h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, i) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, j) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & \cos x & -\sin x \\ 5 & \sin x & \cos x \end{bmatrix}$,

k) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, l) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, m) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$,

n) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ o) $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ p) $\begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$.

2. Vypočtěte determinanty matic (matice řádu vyššího než 3 řešte rozvojem i eliminací):

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

3. Pokuste se ukázat, že platí vztahy

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B, \quad \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B$$

a s jejich pomocí vypočtěte determinanty matic:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 9 & -5 \end{bmatrix}$.

4. Určete, pro která x je daná matice regulární:

a) $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3 & x+1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x & x \\ x & 5 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 \\ x & 0 & x \end{bmatrix}$.

5. Vypočítejte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

6. Pro matici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ určete následující hodnoty:

a) $\det(A)$, b) $\det(A^{-1})$, c) $\det(A^T)$, d) $\det(5A)$.

7. Vypočítejte, pro která x je daná matice A regulární / singulární:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & x & -1 & x \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \end{bmatrix}.$$

8 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo představuje metodu řešení regulárních soustav lineárních rovnic pomocí determinantů.

Věta 3 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť $A \cdot x = b$ je soustava lineárních rovnic, kde A je regulární matice stupně n. Pro každé $j = 1, 2, ..., n$ označme A_j matici, která vznikne z matice A nahrazením $j-$tého sloupce sloupcovým vektorem b pravých stran rovnic dané soustavy. Potom pro každé $j = 1, 2, ..., n$ platí:*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

Důkaz. Nejprve si připomeňme větu o rozvoji determinantu podle sloupce. Plynou z ní tyto vztahy:

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + ... + a_{nj}A_{nk} = 0, \quad \text{pro } k \neq j, \tag{13}$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} = \det A. \tag{14}$$

Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\,...... \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n &= b_i \\
&\,...... \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n &= b_2
\end{aligned}$$

Obě strany každé rovnice vynásobíme algebraickým doplňkem A_{ij} koeficientu a_{ij} jejího $j-$tého členu $a_{ij}x_j$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \quad / \cdot A_{1j} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \quad / \cdot A_{2j} \\
&\ldots\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n &= b_i \quad / \cdot A_{ij} \\
&\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{nn}x_n &= b_n \quad / \cdot A_{nj}
\end{aligned}
$$

Nakonec všechny rovnice sečteme. Po aplikaci vztahů (13), (14) na levou stranu tohoto součtu dostaneme postupně:

$$a_{1j}A_{1j}x_j + a_{2j}A_{2j}x_j + ... + a_{nj}A_{nj}x_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}$$

$$x_j \det A = \det A_j,$$

kde A_j je matice, která vznikne z matice A nahrazením jejího $j-$tého sloupce sloupcovým vektorem b pravých stran rovnic soustavy. □

PŘÍKLAD 8.1. *Je dána soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých:*

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Užitím Cramerova pravidla určete hodnotu neznámé x_3.

9 Inverzní matice

PŘÍKLAD 9.1. *Řešte maticovou rovnici*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Návod:

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot B &= C \\ X &= A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

9.1 Výpočet inverzní matice užitím eliminace

Metoda výpočtu inverzní matice užitím Gaussovy-Jordanovy eliminace je podrobně popsána na straně 33

9.2 Výpočet inverzní matice užitím adjungované matice

Definice 5 (Adjungovaná matice)**.** *Adjungovanou maticí k matici A rozumíme transponovanou matici doplňků prvků matice A. Matici doplňků dostaneme tak, že v matici A nahradíme každý prvek jeho algebraickým doplňkem.*

Poznámka. Adjungovanou matici k matici A značíme nejčastěji jedním z těchto způsobů:

$$\overline{A}, \qquad A^A, \qquad \mathrm{adj}A.$$

PŘÍKLAD 9.2. *Adjungovaná matice k matici A třetího řádu:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Věta 4. *Nechť A je regulární matice. Potom pro inverzní matici A^{-1} k matici A platí tento vztah:*

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}}{\det A}. \tag{15}$$

9.3 Cvičení

1. Řešte užitím Cramerova pravidla:

a) $\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ x + y &= 3, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ 3x - 6y &= 9, \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + 4y &= 5 \\ x + 2y &= 6, \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - 2y &= 1. \end{aligned}$

2. Dokažte platnost vztahu (15). Nejprve pro matici třetího řádu, potom obecně.

3. Pokuste se formulovat algoritmus pro **rychlý výpočet** adjungované matice pro matici **druhého řádu**.

4. Dořešte příklad 9.1.

5. Vypočtěte matici X:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $X \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$,

c) $X \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 32 & 43 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 13 \\ 19 & 19 & 40 \\ 12 & 10 & 26 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

10 Soustavy lineárních rovnic

10.1 Základní pojmy

Budeme uvažovat soustavu m lineárních rovnic o n neznámých s koeficienty z tělesa T (potom hovoříme o soustavě m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &...... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{16}$$

Se soustavou (16) jsou spojeny následující dvě matice.

Matice soustavy A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy A^*:

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Poznámka. Pro označení rozšířené matice používáme i jiné symboly než A^*. Například $Aroz$.

10.1.1 Maticový zápis soustavy

Užitím uvedených matic můžeme soustavu (16) zapsat ve tvaru

$$A \cdot \vec{u} = \vec{b},$$

kde $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ je vektor neznámých a $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ je vektor pravých stran rovnic soustavy. Tyto vektory můžeme chápat také jako matice, pak použijeme zápis

$$A \cdot X = B,$$

kde $X = \vec{u}$ a $B = \vec{b}$.

Často je výhodné hledět na soustavu (16) jako na **lineární kombinaci sloupcových vektorů matice** A:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Což stručněji zapíšeme ve tvaru:

$$x_1 \cdot \overline{a_1} + x_2 \cdot \overline{a_2} + ... + x_n \cdot \overline{a_n} = b.$$

Podle vektoru pravých stran $\vec{b}$ rozlišujeme soustavy (16) na dva typy:

1) Homogenní soustavy pro $\vec{b} = \vec{o} = (0, 0, ..., 0)$

2) Nehomogenní soustavy pro $\vec{b} \neq \vec{o}$

10.2 Řešitelnost soustavy

Zajímá nás, jak poznáme, zda má soustava řešení a kolik různých řešení může mít.

Věta 5 (Frobeniova věta)**.** *Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj.*

$$h(A) = h(A^*).$$

Důkaz. Frobeniova věta má formu ekvivalence. Můžeme ji schematicky vyjádřit takto:

$$\text{aspoň jedno řešení} \;\Leftrightarrow\; h(A) = h(A^*).$$

Dokazujeme tedy příslušné dvě implikace:

(1) aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ $h(A) = h(A^*)$

aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ ex. $x_1, x_2, ..., x_n$ tak, že $x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = b \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \Rightarrow [\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n] = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, b] \Rightarrow h(A) = h(A^*)$[1]

(2) $h(A) = h(A^*) \Rightarrow$ aspoň jedno řešení

$h(A) = h(A^*) \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \Rightarrow$ existuje řešení $x_1, x_2, ..., x_n$

$\square$

PŘÍKLAD 10.1. *Zjistěte, zda je řešitelná tato soustava*

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

[1] Zápisem $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n]$ rozumíme tzv. **lineární obal** množiny vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, což **je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů**. Více v předmětu *Lineární algebra a geometrie.*

Poznámka. Řešení soustavy lineárních rovnic může dopadnout trojím způsobem. Buď má právě jedno řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení a nebo řešení nemá. Jiná možnost není. Jak to dopadne, poznáme už při ověřování platnosti Frobeniovy podmínky takto:

(i) $h(A) = h(A^*) = n$ … soustava má právě jedno řešení (tj. jednu uspořádanou $n-$tici),

(ii) $h(A) = h(A^*) < n$ … soustava má nekonečně mnoho řešení,

(iii) $h(A) \neq h(A^*)$ … soustava nemá řešení.

10.2.1 Cvičení

1. Rozhodněte o řešitelnosti daných soustav. U každé z nich rozhodněte, zda má právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, či zda nemá žádné řešení. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 4x + 3y - z &= 7, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - 5z &= 2, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 4. \end{aligned}$$

10.3 Homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Homogenní soustavou rozumíme soustavu rovnic, které mají na pravých stranách výhradně nuly. Pro takovou soustavu je vždy splněna Frobeniova podmínka. Homogenní soustava má tedy vždy řešení. Pokud je její matice regulární, tj. $h(A) = n$, má jediné - triviální - řešení, kterým je uspořádaná $n-$tice tvořená samými nulami. Pokud je matice soustavy singulární, tj. $h(A) < n$, má homogenní soustava nekonečně mnoho řešení. Tímto případem se teď budeme zabývat.

PŘÍKLAD 10.2. *Řešte homogenní soustavu*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \end{array} \tag{18}$$

Poznámka. Dvě soustavy $A\vec{u} = \vec{o}$, $B\vec{u} = \vec{o}$ jsou ekvivalentní právě když řádkové vektory matic A, B generují stejný podprostor. Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic totiž odpovídají ekvivalentním úpravám odpovídající matice prováděným na jejích řádcích.

Řešení: Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$W_A = \{(s + 2t, -2s - 3t, s, t); s, t \in \mathbb{R}\},$$

Množina W_A je podprostorem vektorového prostoru R^4. Můžeme ji zapsat jako lineární obal dvou nezávislých vektorů:

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}] \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4.$$

Dimenze W_A je potom

$$\dim W_A = 2.$$

Věta 6. *Nechť je dána homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem* $\mathbb{R}$ *a nechť matice A této soustavy má hodnost*

$h(A)$. Potom množina W_A všech řešení této soustavy je podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ a má dimenzi $n - h(A)$, tj.

$$\dim W_A = n - h(A).$$

Důkaz. [1]

(1) Nejprve dokážeme, že W_A je podprostorem $\mathbb{R}^n$:

Využijeme následující vlastnosti maticových operací (A, B, C jsou matice, $r \in \mathbb{R}$) spolu s větou o určení podprostoru, kterou známe ze zimního semestru:

(i) $A(B + C) = AB + AC$,

(ii) $(rA)B = rAB = r(AB)$.

I. $u, v \in W_A; \Rightarrow Au = o,\ Av = o \Rightarrow Au + Av = o \Rightarrow A(u + v) = o \Rightarrow u + v \in W_A$.

II. $u \in W_A, \alpha \in \mathbb{R}; \Rightarrow Au = o \Rightarrow \alpha(Au) = o \Rightarrow A(\alpha u) = o \Rightarrow \alpha u \in W_A$.

(2) Teď dokážeme, že $\dim W_A = n - h(A)$.

Důkaz naznačíme pro případ $n = 3$. Možnost zobecnění bude zřejmá. Využijeme větu o vztahu dimenzí jádra a obrazu homomorfismu. Tu sice ještě nemáme dokázanou, ale to napravíme během tohoto semestru.

Uvažujme homomorfismus

$$f(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3, a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)$$

Pro jeho jádro $\mathrm{Ker} f$ a obraz $\mathrm{Im} f$ zřejmě platí:

$$\mathrm{Ker} f = W_A,$$

[1] K tomuto důkazu nemáme vytvořen odpovídající pojmový aparát. Vrátíme se k němu v předmětu *Lineární algebra a geometrie.*

$$\mathrm{Im} f = [\{(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33})\}] \,,$$

kde dimenze obrazu odpovídá hodnosti matice soustavy A, tj. $\dim \mathrm{Im} f = h(A)$. Potom, podle zmíněné věty, kterou si teprve dokážeme, platí

$$\dim \mathrm{Ker} f = \dim V - \dim \mathrm{Im} f. \tag{19}$$

Dimenze vektorového prostoru neznámých x_1, x_2, x_3 soustavy je v případě uvedeného homomorfismu rovna 3, obecně pak n. Po dosazení $\mathrm{Ker} f = W_A$, $\dim \mathrm{Im} f = h(A)$ a $\dim V = n$ do 19 dostaneme

$$\dim W_A = n - h(A) \tag{20}$$

$\square$

10.3.1 Vytvoření báze vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy

Vraťme se k řešení příkladu 10.2. Viděli jsme, že si ho můžeme zapsat tvaru

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}] \,.$$

V této kapitole si na příkladech ukážeme, jak se dají přímo najít vektory báze podprostoru W_A.

Postup řešení Příkladu 10.2:

1. Určíme tzv. základní neznámé

Provedeme Gaussovu eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Neznámé, které odpovídají prvním nenulovým prvkům na každém řádku matice v Gaussově tvaru (viz podtržení), nazveme **základní neznámé**. V našem případě se jedná o x_1 a x_2. Vzhledem k těmto neznámým pak řešíme soustavu, když zbývající neznámé ("nezákladní" nebo též "volné" neznámé) nahradíme reálnými parametry. V našem konkrétním případě tedy

$$\text{základní nezn.}: \quad x_1, x_2; \qquad \text{volné nezn.}: \quad x_3 = s, \quad x_4 = t; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Odpovídající soustava má potom tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array} \tag{21}$$

2. Vypočítáme dimenzi prostoru řešení W_A

$$\dim W_A = n - h(A) = 4 - 2 = 2$$

3. Hledáme dvě nezávislá řešení $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ tvořící bázi W_A

Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ nejprve volíme takto:

$$\vec{b}_1 = (x_1, x_2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (y_1, y_2, 0, 1).$$

Potom je dosadíme do soustavy (21) a dopočítáme příslušné hodnoty x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\vec{b}_1 = (1, -2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (2, -3, 0, 1).$$

Obecné řešení $\vec{x}$ homogenní soustavy (10.2) pak můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$:

$$\vec{x} = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1); \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD 10.3. *Řešte následující homogenní soustavu lineárních rovnic a určete bázi vektorového prostoru všech řešení této soustavy:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 0 \end{array} \tag{22}$$

Řešení:

$$W_A = [\{(2,1,0,0,0),(3,0,5,1,0),(7,0,12,0,1)\}]$$

Obecné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{x} = r(2,1,0,0,0) + s(3,0,5,1,0) + t(7,0,12,0,1); \quad r,s,t \in \mathbb{R}. \qquad (23)$$

Poznámka. Z tvrzení věty 6 plynou jasné závěry o počtu řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Je zřejmé, že hodnost matice A je vždy menší nebo rovna dimenzi n prostoru neznámých (počtu neznámých). Uvažujme nejprve $h(A) = n$. Po dosazení do vztahu $\dim W_A = n - h(A)$ dostaneme pro dimenzi prostoru řešení soustavy $\dim W_A = 0$. Jedná se tedy o triviální podprostor obsahující jediné - **triviální (nulové) řešení** soustavy. Pro $h(A) < n$ pak dostaneme $\dim W_A \neq 0$. Prostor řešení obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků - soustava má **nekonečně mnoho řešení** soustavy.

10.4 Nehomogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Zajímají nás zde hlavně neregulární soustavy, tj. soustavy, které mají nekonečně mnoho řešení. Ukážeme si, jak spolu souvisí řešení takové nehomogenní soustavy s řešením jí odpovídající soustavy homogenní. Začneme příkladem soustavy, která se, až na pravé strany, shoduje s homogenní soustavou (22) z příkladu 10.3.

PŘÍKLAD 10.4. *Řešte následující soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 8 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 6 \end{array} \qquad (24)$$

Řešení: Řešení

$$M = \{(-14 + 2k + 3l + 7m, k, -22 + 5l + 12m, l, m)\}$$

můžeme přepsat do tvaru, v němž je patrné řešení (23) příslušné **homogenní** soustavy (22):

$M = \{(-14, 0, -22, 0, 0) + k(2, 1, 0, 0, 0) + l(3, 0, 5, 1, 0) + m(7, 0, 12, 0, 1)\}$

Věta 7 (Řešení nehomogenní soustavy)**.** *Nechť $\vec{v}$ je libovolné řešení nehomogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ a W_A je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$. Pak pro množinu M všech řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ platí:*

$$M = \{\vec{v} + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

Poznámka. Věta 7 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení této soustavy a všech řešení příslušné homogenní soustavy**.

Důkaz. (1) $\{\vec{v} + \vec{u}\} \subseteq M; \quad A(\vec{v} + \vec{u}) = A\vec{v} + A\vec{u} = A\vec{v} + \vec{o} = A\vec{v} = \vec{b}$

(2) $M \subseteq \{\vec{v} + \vec{u}\}; \quad A\vec{w} = \vec{b},\ A\vec{v} = \vec{b} \Rightarrow A(\vec{w} - \vec{v}) = \vec{o} \Rightarrow$ existuje $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v} \in W_A$ tak, že $A\vec{w} = A(\vec{v} + \vec{u}) = \vec{b}$. □

Závěr: Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj. $h(A) = h(A^*) < n$) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme $\vec{x}$.

2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho $\vec{v}$.

3. Množinu M všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = \vec{v} + \vec{x}$$

Poznámka. Množina všech řešení nehomogenní soustavy **netvoří vektorový prostor** (neobsahuje nulový vektor). Jedná se o tzv. **lineární množinu**. Později si ukážeme, že se jedná o afinní bodový podprostor.

10.5 Řešení regulárních soustav

Soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ ...... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{25}$$

nazýváme **regulární**, jestliže je regulární její matice soustavy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

To znamená, když je matice A čtvercová řádu n (tj. m=n, neznámých je stejný počet jako rovnic) a její hodnost je rovněž n (nebo je splněna ekvivalentní podmínka $\det A \neq 0$). Sloupcové (řádkové) vektory regulární matice jsou tedy lineárně nezávislé a tvoří bázi vektorového prostoru V_n dimenze n :

$$V_n = [\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}] = [\{a_1, a_2, ..., a_n\}].$$

Připomeňme si, že soustavu (25) můžeme zapsat pomocí lineární kombinace sloupcových vektorů matice A :

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Protože $\vec{b} \in V_n$ a množina sloupcových vektorů $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ je bází V_n, je zřejmé, že existuje jediná $n-$tice $(x_1, x_2, ..., x_n)$ taková aby rovnost (26) platila. Regulární soustava (25) má tedy skutečně právě jedno řešení ve tvaru $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

PŘÍKLAD 10.5. *Řešte následující soustavu v* $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

10.5.1 Gaussova a Gaussova-Jordanova eliminace

Použijeme ekvivalentní úpravy k převedení matice na náležitý tvar. Soustava odpovídající výsledné matici má stejné řešení jako matice původní a přitom je jednodušší.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Řešení soustavy: $X = (-1, -1, 0, 1)$.

10.5.2 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo a jeho důkaz najdete na straně 58

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Spočítáme příslušné determinanty:

$$\det A = 81, \quad \det A_1 = -81, \quad \det A_2 = -81, \quad \det A_3 = 0, \quad \det A_4 = 81.$$

a dle Cramerova pravidla určíme řešení soustavy:

$$x_1 = \frac{-81}{81} = -1, \quad x_2 = \frac{-81}{81} = -1, \quad x_3 = \frac{0}{81} = 0, \quad x_4 = \frac{81}{81} = 1.$$

10.5.3 Užití inverzní matice

Řešenou soustavu můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$A \cdot X = B,$$

kde A je matice soustavy, B je matice pravých stran a X je matice neznámých. Potom pro X platí

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

kde A^{-1} je inverzní matice k matici A,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{27} & \dfrac{7}{27} & 0 & \dfrac{1}{27} \\ \dfrac{-1}{27} & \dfrac{-5}{27} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{-2}{27} \\ \dfrac{-2}{27} & \dfrac{-1}{27} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{-13}{27} \\ \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{-1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Po vynásobení dostaneme:

$$X = A^{-1} \cdot B = (-1, -1, 0, 1).$$

10.6 Řešení soustav lineárních rovnic - cvičení

Úkol: Řešte dané soustavy. Nejprve ověřte platnost Frobeniovy podmínky. U regulárních soustav vyzkoušejte všechny výše uvedené metody.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 4 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \\ 3x - 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 6x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 13x_2 + 40x_3 - 16x_4 &= 13 \end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 16 \end{aligned}$$

(j)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}$$