1. a) Matice. Typ matice. Prvky matice. Zápis matice. Transponovaná matice.

ÚKOL 1: Uvedené pojmy vysvětlete s využitím následujících matic:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Hlavní druhy matic - obdélníková, čtvercová, diagonální, jednotková, symetrická, antisymetrická, trojúhelníková, nulová.

ÚKOL 2: Každý z výše uvedených druhů ilustrujte příkladem konkrétní matice a, pokud to jde, uveďte i situaci, v níž se s takovou maticí můžeme setkat. Doplňte následující rovnosti tak, aby v nich na pravé straně byl vždy součin dvou matic : $(A \cdot B)^{-1} = ...$, $(A \cdot B)^T = ...$,

---

2. a) Rovnost matic. Násobení matice reálným číslem. Sčítání a odčítání matic. Opačná matice. Vlastnosti operací sčítání matic a násobení matice skalárem.

ÚKOL 1: Příslušné pojmy a vlastnosti vysvětlete s využitím následujících matic.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}.$$

b) Lineární kombinace. Lineární kombinace vektorů. Lineární kombinace matic.

ÚKOL 2: Vysvětlete pojem lineární kombinace. Uveďte konkrétní příklady lineárních kombinací vektorů, resp. matic. Mohu vytvořit lineární kombinaci skupiny jakýchkoliv vektorů (matic), nebo musí splňovat nějakou podmínku?

---

3. a) Skalární součin vektorů.

ÚKOL 1: Vypočtěte odchylku vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{u} = (-5; -6), \ \vec{v} = (-11; -1).$$

b) Násobení matic a jeho vlastnosti. Jednotková matice. Nulová matice. Inverzní matice.

ÚKOL 2: Vlastnosti násobení matic vysvětlete s využitím následujících matic:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}.$$

---

4. **a) Vlastnosti maticových operací (násobení matice reálným číslem, sčítání matic, násobení matic).**

ÚKOL 1: Uveďte vlastnosti uvedených maticových operací. U každé z vlastností vysvětlete její význam.

b) Maticové rovnice.

ÚKOL 2: Navrhněte postup řešení následující maticové rovnice (A, B, C, D a X jsou matice):

$$A \cdot X + B = C \cdot X + D.$$

---

5. **a) Hodnost matice. Úpravy neměnící hodnost matice. Gaussova eliminace. Gaussův tvar matice. Určení hodnosti matice.**

ÚKOL 1: Příslušné pojmy vysvětlete s využitím následující matice M. Určete hodnosti matic M a M^T.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Gaussova-Jordanova eliminace.

ÚKOL 2: Danou soustavu řešte, pokud to jde, užitím Gaussovy-Jordanovy eliminace:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12. \end{aligned}$$

---

6. **a) Permutace. Definice permutace. Inverze v pořadí. Parita a znaménko permutace. Maticový zápis.**

ÚKOL 1: Příslušné pojmy vysvětlete s využitím následujících permutací:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Permutace v definici determinantu.

ÚKOL 2: Na příkladu determinantu obecné matice třetího stupně vysvětlete význam permutací pro definici determinantu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

---

7. **a) Determinant matice. Definice determinantu. Aplikace determinantu.**

ÚKOL 1: Charakterizujte pojem determinant matice. Na příkladu determinantů matic druhého a třetího stupně vysvětlete obsah definice tohoto pojmu. Jak můžeme využít determinant při výpočtu obsahu trojúhelníku?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

b) Metody výpočtu determinantů. Singulární a regulární matice.

ÚKOL 2: S využitím následujících matic vysvětlete všechny možné metody výpočtu determinantu matic 2. a 3. stupně. Která z nich je regulární, která singulární?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

---

8. **a) Regulární soustava rovnic. Cramerovo pravidlo.**

ÚKOL 1: Kdy říkáme, že soustava lineárních rovnice je regulární (singulární)? Užitím Cramerova pravidla, pokud to jde, řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ 5x + 7y &= -9. \end{aligned}$$

b) Důkaz Cramerova pravidla. Věta o rozvoji determinantu.

ÚKOL 2: Pomocí determinantu obecné matice třetího stupně stručně popište tvrzení věty o rozvoji determinantu. Na příkladu obecné soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých potom neznačte důkaz Cramerova pravidla, který toto tvrzení využívá:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned} .$$

---

9. **a) Determinant matice. Výpočet determinantu matice 4. a vyššího stupně.**

ÚKOL 1: Charakterizujte pojem determinant matice. Na příkladu uvedené matice vysvětlete a demonstrujte metody výpočtu determinantu matic stupně vyššího než tři (rozvoj, eliminace):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vlastnosti determinantu.

ÚKOL 2: Pro níže uvedenou matici A vypočítejte následující determinanty: $\det(A)$, $\det(A^T)$, $\det(A^{-1})$, $\det(5A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. a) Inverzní matice. Matice regulární a singulární. Výpočet inverzní matice eliminací a užitím adjungované matice.

ÚKOL 1: Definujte inverzní matici. S využitím následujících matic vysvětlete a demonstrujte metody výpočtu inverzní matice eliminací a užitím adjungované matice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Adjungovaná matice. Vztah pro výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované. Souvislost s větou o rozvoji determinantu.

ÚKOL 2: Pomocí níže uvedené matice naznačte důkaz vztahu pro výpočet inverzní matice užitím matice adjungované:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

---

11. a) Věta o rozvoji determinantu. Algebraický doplněk prvku matice. Rozvoj determinantu.

ÚKOL 1: Pomocí determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

vysvětlete pojmy algebraický doplněk prvku matice a rozvoj determinantu. Potom vyslovte větu o rozvoji determinantu a vysvětlete její důsledky.

b) Řešitelnost soustavy.

ÚKOL 2: U následujících soustav určete počet jejich řešení. Interpretujte geometricky.

a) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -4x + 6y &= -8, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 0, \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ 2x - 4y &= 9, \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 3x - 2y &= 3 \\ 2x - 3y &= 6. \end{aligned}$

---

12. a) Způsoby zápisu soustav lineárních rovnic. Matice soustavy. Rozšířená matice soustavy. Regulární soustavy lineárních rovnic. Metody řešení regulárních soustav (Cramerovo pravidlo, užití inverzní matice, eliminace).

ÚKOL 1: Popište uvedené pojmy a metody řešení regulárních soustav lineárních rovnic. Jejich použití předveďte na následující soustavě:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x - 3y + 7z &= 7 \\ 3x - 4y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

b) Maticové rovnice.

ÚKOL 2: Vysvětlete možné postupy při řešení maticových rovnic následujících typů:

$$A \cdot X = B, \qquad X \cdot A = B, \qquad A \cdot X \cdot B = C.$$