# 4 Hodnost matice

**Příklad 25.** *Řešte v $R^3$ soustavu lineárních rovnic:*

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= 2 \\
2x + 6y + z &= 7 \\
x + y + 4z &= 3
\end{aligned}
$$

*Řešení:*

| **Metoda sčítací** | **Metoda maticová** |
|---|---|
| Soustavu převedeme na trojúhelníkový tvar: | Použijeme Gaussovu eliminaci: |
| $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$ | $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$ |
| $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2y - z &= 3 \\ -y + 3z &= 1 \end{aligned}$ | $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$ |
| $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}$ | $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$ |
| $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ 5z &= 5 \end{aligned}$ | $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$ |
| $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$ | $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ |
| $[x, y, z] = [-3, 2, 1]$ | *Gaussův tvar matice* |

## 4.1 Gaussova eliminační metoda

- metoda řešení soustavy $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých užitím matic. Je založena na vytváření posloupnosti navzájem ekvivalentních matic (tj. jim odpovídající soustavy mají stejná řešení), která končí maticí v tzv. Gaussově tvaru. K tomu používáme následující ekvivalentní úpravy matic.

### Ekvivalentní úpravy matic

1) Vzájemné prohození dvojice řádků matice.

2) Vynásobení řádku matice nenulovou konstantou (reálným číslem).

3) Přičtení (odečtení) násobku řádku matice k jinému řádku.

4) Odstranění nulového řádku.

Cílem postupného provádění těchto ekvivalentních úprav je:

### Matice v Gaussově tvaru

- matice, u které na každém řádku přibyde zleva alespoň jedna nula oproti řádku předchozímu.

Příklady matic v Gaussově tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Příklady matic, které nejsou v Gaussově tvaru:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Ekvivalentní matice**

Dvě matice, z nichž jedna vznikla z druhé výše uvedenými úpravami, nazýváme ekvivalentní. Soustavy rovnic, příslušné těmto dvěma maticím, mají stejná řešení. Ekvivalenci matic $A, B$ značíme takto:

$$A \sim B.$$

## 4.2 Hodnost matice $A$

- číslo, které je rovno počtu řádků matice v Gaussově tvaru (mějme na paměti, že nulové řádky nepočítáme), která je s maticí $A$ ekvivalentní. Hodnost matice $A$ značíme

$$h(A).$$

Po zavedení pojmů „vektorový prostor“ a „dimenze“ budeme hodnost matice definovat jako **dimenzi vektorového prostoru generovaného řádkovými (sloupcovými) vektory matice**.

**Příklad 26.** *Určete hodnost matice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Poznámka.** Pro hodnost matice typu $(m, n)$ platí:

$$h(A) \leq \min(m, n).$$

**Příklad 27.** *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11. \end{aligned}$$

*Řešení:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \end{array}\right] \sim .$$

$$. \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 120 & 120 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Pokud pokračujeme v ekvivalentních úpravách i po dosažení Gaussova tvaru, s cílem dostat nuly i nad hlavní diagonálou a v hlavní diagonále samé jedničky, provádíme tzv. **Gauss-Jordanovu eliminaci**. Tu lze použít k řešení soustavy, která má právě jedno řešení (jedná se o tzv. *regulární* matici). Toto řešení (v našem příkladě uspořádanou trojici hodnot $[x, y, z] = [3, 1, 1]$) najdeme v posledním sloupečku matice v **Gauss-Jordanově tvaru** (viz červeně zvýrazněné hodnoty).