6 Aplikace Gaussovy eliminace

6.1 Regulární matice

Čtvercovou matici A nazýváme **regulární**, právě když je její hodnost $h(A)$ rovna jejímu stupni, tj. platí:

$$h(A) = n.$$

Příklad 28. *Která z následujících matic je regulární?*

$$a)\ A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b)\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$c)\ A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad d)\ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme **singulární**.

6.2 Inverzní matice

Nechť A je čtvercová matice stupně n. Matice X téhož stupně se nazývá **inverzní maticí k matici** A, jestliže platí

$$X \cdot A = A \cdot X = I,$$

kde I je jednotková matice stupně n. Inverzní matici značíme

$$A^{-1}.$$

Příklad 29. *Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Řešení: Neznámou matici X můžeme zapsat obecně takto:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Potom lze rovnici (1) psát ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kterému odpovídají následující dvě soustavy, lišící-se jenom pravými stranami:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 3x_3 & = & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_4 & = & 0 \\ 4x_2 + 3x_4 & = & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Tyto soustavy řešíme najednou, pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace jedné společné „rozšířené“ matice:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Potom:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Ze zadání příkladu je zřejmé, že nalezená matice X je matice inverzní k matici A.

ÚKOL: Ověřte, zda platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Poznámka. Regulární matice
Regulární matici charakterizujeme také jako čtvercovou matice, k níž **existuje matice inverzní**. V opačném případě hovoříme o matici **singulární**.

Jednoznačnost existence inverzní matice
Nabízí se otázka, zda může k dané regulární matici existovat více navzájem různých inverzních matic. Odpovědí je, že ne. „Pokud k matici A existuje inverzní matice, je jediná."
Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existují dvě matice B a C, které splňují definici inverzní matice k A, tj. $AB = BA = I$ a $AC = CA = I$. Potom ale $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$, což je spor. Předpoklad tedy není správný, existuje jediná inverzní matice k A (pokud existuje).

Výpočet inverzní matice
Při výpočtu inverzní matice k A budeme využívat následující vlastnost: „Jestliže A je regulární matice a pro matici X platí buď $AX = I$ nebo $XA = I$, je X maticí inverzní k A, tj. $X = A^{-1}$."
Při důkazu uvedené vlastnosti předpokládáme platnost vztahu $AX = I$ a snažíme se dokázat platnost vztahu $XA = I$. Přitom ještě využijeme definici inverzní matice. Platí $XA = IXA = (A^{-1}A)XA = A^{-1}(AX)A = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$.

Výpočet inverzní matice užitím Gaussovy-Jordanovy eliminace:

$$\left[\, A \,\middle|\, I \,\right] \sim \ldots \sim \left[\, I \,\middle|\, A^{-1} \,\right].$$

Příklad 30. *Určete inverzní matici k matici*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pro regulární matice A, B téhož stupně platí:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{2}$$

ÚKOL: Ukažte platnost vlastnosti (2) na příkladu matic:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Vlastnost podobná (2) platí i pro **transponované matice**, tj.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \tag{3}$$

ÚKOL: Ukažte platnost této vlastnosti na příkladu matic:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6.3 Maticové rovnice

Příklad 31. *Jsou dány matice* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Najděte neznámou matici X tak, aby platilo:*

a) $AX = B$,

b) $XA = B$.

6.4 Lineární závislost vektorů

Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ nazýváme lineárně závislé právě tehdy, když lze jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, tj. když existuje takové $k \in \{1, 2, ..., n\}$, pro které lze vektor $\vec{v}_k$ zapsat takto:

$$\vec{v}_k = c_1\vec{v}_1 + c_1\vec{v}_1 + ... + c_{k-1}\vec{v}_{k-1} + c_{k+1}\vec{v}_{k+1} + ... + c_n\vec{v}_n,$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n \in R$.

Příklad 32. *Zjistěte, který z vektorů $\vec{a}_1 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 5, 5, 1)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\vec{a}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.*

Příklad 33. *Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé. Po zjištění lineární závislosti určete tu jejich lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.*

a) $\vec{a} = (2, 5, 7)$, $\vec{b} = (6, 3, 4)$, $\vec{c} = (5, -2, 3)$,

b) $\vec{a} = (6, 4, 2)$, $\vec{b} = (-9, 6, 3)$, $\vec{c} = (-3, 6, 3)$.

c) $\vec{a} = (-1, 0, 3)$, $\vec{b} = (4, 2, 0)$, $\vec{c} = (-5, -1, 9)$.

d) $\vec{a} = (1, 3, 5)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$,

e) $\vec{a} = (3, -8, 1)$, $\vec{b} = (-6, 16, -2)$,

f) $\vec{a} = (3, 2, 7)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (2, 0, 3)$,

g) $\vec{a} = (3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (5, 4, 2)$,

h) $\vec{a} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{c} = (3, 2, 1, 1)$,

i) $\vec{a} = (3, 0, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 0, 3)$, $\vec{d} = (1, 0, 3, 0)$.