7.5 Definice determinantu

Definice 7.1 (DETERMINANT)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice $n-$tého řádu nad tělesem T. Determinantem matice A rozumíme prvek tělesa T ve tvaru:*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{zn}\pi \cdot a_{1r_1} \cdot a_{2r_2} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace π množiny $1, 2, 3, \ldots, n$. Množina těchto permutací je označena symbolem S_n.

Příklad 44.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+(-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

7.6 Pravidla pro počítání s determinanty (vlastnosti determinantu)

Pro počítání s determinanty platí následující pravidla. Tato pravidla se běžně uvádějí ve formě věty (nebo jednotlivých vět). Důkaz pak vesměs vychází z uvedené definice determinantu. My se zde spokojíme se seznamem těchto pravidel, doplněným ilustračními příklady.

1. Zaměníme-li vzájemně dva řádky (sloupce), změní determinant své znaménko.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

2. Jsou-li všechny prvky jednoho řádku (sloupce) rovny nule, je determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot(-3)+3\cdot0\cdot1)-(3\cdot0\cdot(-3)+2\cdot0\cdot1+1\cdot0\cdot1) = 0$$

3. Obsahuje-li matice dva stejné řádky (sloupce), je její determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1\cdot2\cdot6+2\cdot3\cdot4+3\cdot1\cdot5)-(3\cdot2\cdot4+2\cdot1\cdot6+1\cdot3\cdot5) = 0$$

4. Je-li řádek (sloupec) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je determinant roven nule.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= \\ &= (1\cdot2\cdot k\cdot6+2\cdot3\cdot k\cdot4+3\cdot1\cdot k\cdot5)- \\ &-(3\cdot2\cdot k\cdot4+2\cdot1\cdot k\cdot6+1\cdot3\cdot k\cdot5) \\ &= 1\cdot2\cdot k\cdot6+2\cdot3\cdot k\cdot4+3\cdot1\cdot k\cdot5- \\ &-3\cdot2\cdot k\cdot4-2\cdot1\cdot k\cdot6-1\cdot3\cdot k\cdot5 = 0, \end{aligned}$$

Poznámka. Z porovnání posledních dvou příkladů plyne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Jedná se o projev následující vlastnosti determinantů.

5. Násobíme-li prvky jednoho řádku (sloupce) nějakým číslem, násobí se tímto číslem celý determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -26 = -2 \cdot 13.$$

Důsledky:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$

(ii) $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$, kde n je stupeň matice A.

6. Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců).

Důsledek:
Možnost užití Gaussovy eliminace při výpočtu determinantu.

Příklad 45. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -3.$$

Příklad 46. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

7. Determinant matice transponované je stejný jako determinant matice původní.

$$\det A = \det A^T$$

8. Determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů jednotlivých matic (Cauchyho věta).

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důsledky:

(i) $A \cdot B \neq B \cdot A$, ale

$$\det (A \cdot B) = \det (B \cdot A).$$

(ii) $\det (A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \quad \wedge \quad \det (A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$, potom dostáváme vztah pro výpočet determinantu inverzní matice $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, který uvádíme jako další vlastnost.

9. Determinant inverzní matice je roven převrácené hodnotě determinantu matice původní

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Poznámka. Pro čtvercovou matici A stupně n platí, že následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

$$\text{(i) } h(A) = n, \quad \text{(ii) } \det A \neq 0, \quad \text{(iii) } A \text{ je } \textbf{regulární}.$$