# 7 Determinant matice

Determinant určujeme jenom u čtvercových matic.

**Příklad 34.** *Řešte soustavu rovnic*

$$x - y = 1 \tag{4}$$
$$2x + 3y = 5. \tag{5}$$

*Řešení:* Soustavu řešíme například sčítací metodou. Po odečtení dvojnásobku (6) od rovnice (7) dostaneme $y = \frac{3}{5}$. Dosazením do první rovnice pak dostaneme $x = \frac{8}{5}$.

**Příklad 35.** *Řešte soustavu rovnic*

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \tag{6}$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2. \tag{7}$$

*Řešení:* Za předpokladu, že výraz $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ je různý od nuly, dostáváme toto řešení:

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

## 7.1 Užití determinantů při řešení soustavy lineárních rovnic

**Cramerovo pravidlo**

Dané soustavě dvou rovnic o dvou neznámých přiřadíme následující tři čtvercové matice a u každé z nich vypočítáme její determinant:

**1.** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ … matice soustavy

Při výpočtu determinantu této (i dalších dvou) matice uplatníme tzv. **křížové pravidlo**, které usnadňuje výpočet determinantu u matic druhého řádu:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

**2.** $A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}$ … matice soustavy, u níž je **první sloupec nahrazen** sloupcovým vektorem pravých stran rovnic $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

$$\det A_1 = b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2$$

**3.** $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$ … matice soustavy, u níž je **druhý sloupec nahrazen** sloupcovým vektorem pravých stran rovnic $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ :

$$\det A_2 = a_{11} \cdot b_2 - a_{12} \cdot b_2$$

Řešení dané soustavy lze potom, za předpokladu, že $\det A \neq 0$, zapsat ve tvaru

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}.$$

Aplikací uvedeného postupu na Příklad 34 dostaneme výsledky, které odpovídají jeho výše uvedenému řešení:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{3}{5}.$$

Tato metoda není spojena jenom se soustavou dvou rovnic o dvou neznámých. Lze ji použít při řešení jakékoliv (regulární) soustavy $n$ lineárních rovnic o $n$ neznámých. Této metodě řešení regulárních soustav se říká Cramerovo pravidlo. Obecně ji lze zapsat takto:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}; \quad \det A \neq 0.$$

**Příklad 36.** *Vypočtěte obsah rovnoběžníku, který je určen vektory* $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$.

**Příklad 37.** *Vypočtěte obsah rovnoběžníku, který je určen vektory* $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 5)$.

### 7.2 Zápis determinantu

Uvažujme matici druhého řádu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, potom determinant matice $A$ zapíšeme ve tvaru

$$\det A \qquad \text{nebo} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

V případě matice řádu 2 pak již víme, že $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$,

### 7.3 Výpočet determinantu

Determinant je definován (Def.7.1) pro čtvercové matice všech řádů stejně. Pro matice řádů 1, 2, 3 a 4 se ale liší obvyklé způsoby jeho výpočtu. Nyní se s nimi seznámíme.

**1.** Matice řádu $n = 1$ :

$$A = [a_{11}]\,, \qquad \text{potom} \qquad \det A = a_{11}.$$

**2.** Matice řádu $n = 2$ : **KŘÍŽOVÉ PRAVIDLO**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{potom} \qquad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

**3.** Matice řádu $n = 3$ : **SARRUSOVO PRAVIDLO**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

potom

$$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - \\ -(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}).$$

Výpočet determinantu matice 3. řádu si usnadníme uplatněním následujícího schématického postupu:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Nejprve násobíme prvky matice v následujících třech liniích rovnoběžných s hlavní diagonálou a tyto součiny sečteme:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{array}\right.$$

Tak dostaneme výraz

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \tag{8}$$

Potom opakujeme stejný postup pro následující tři směry rovnoběžné s druhou diagonálou:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Výsledkem je výraz

$$(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \tag{9}$$

Determinant matice A je potom roven rozdílu výrazů 8 a 9:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}).$$

## 4. Matice řádu $n > 3$ : **ROZVOJ DETERMINANTU**

Rozvoji determinantu a jeho použití se zevrubně věnují kapitoly 7.7, 7.8.

**Poznámka.** Tato metoda výpočtu determinantu je použitelná pro matici jakéhokoliv řádu. Pro řády $n \leq 3$ však většinou volíme speciální metody uvedené výše.

## 5. TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE

Pro čtvercové matice libovolného stupně, které mají pod nebo nad hlavní diagonálou samé nuly je determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále.

**Příklad 38.** *Vypočtěte determinant matice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Příklad 39.** *Vypočtěte determinanty těchto matic:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$