7.4 Permutace množiny

Příklad 40. *Vypočtěte následující determinanty. Hledejte společné rysy výrazů pro hodnoty determinantů matic 2. a 3. stupně. Potom se pokuste definovat determinant.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \ldots, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots$$

Poznatek z řešení příkladu 40:

Determinant matice je tvořen všemi takovými součiny, že z každého řádku a z každého sloupce matice je v každém z nich obsažen právě jeden prvek.

Těchto součinů je $n!$ (n faktoriál), kde n je stupeň matice. Část z nich je uvedena znaménkem „-“, část pak znaménkem „+“.

K vyslovení úplné definice determinantu zbývá už jenom říci, že o tomto znaménku rozhoduje pořadí, v jakém vybíráme činitele příslušného součinu z jednotlivých sloupců. Jedná se o **znaménko permutace sloupcových indexů**.

Řešení příkladu 40 můžeme zapsat takto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+ (-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

kde exponenty u -1 vyjadřují počet inverzí v odpovídajících permutacích sloupcových indexů. Znaménko mocniny pak odpovídá znaménku těchto permutací.

7.4.1 Permutace množiny

Permutací množiny M rozumíme každé vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M na sebe.

Uvažujme například množinu $M = \{1, 2, 3\}$. Potom zobrazení f, pro které platí $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, je permutací.

Permutace množiny M představuje určité uspořádání jejích prvků. To známe z kombinatoriky. Víme, že počet všech permutací $n-$prvkové množiny je roven $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (tj. n faktoriál).

Permutaci obvykle **značíme** písmenem π. Symbolicky ji můžeme zapsat jako zobrazení

$$\pi : M \to M.$$

Konkrétní permutace množiny $M = \{1, 2, 3\}$ zapisujeme takto:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad ...$$

Potom pro obrazy prvků množiny M platí například, že $\pi_1(2) = 2$, $\pi_2(1) = 3$, $\pi_3(2) = 3$ apod.

Poznámka. Množina všech permutací množiny M spolu s operací skládání permutací (tj. skládání zobrazení, protože permutace je zobrazení) tvoří grupu. Ukažte to na příkladě. Je tato grupa komutativní?

Obecnou permutaci na množině $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$ zapíšeme takto:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & ... & r_n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

potom pro obraz prvku i množiny M platí

$$\pi(i) = r_i.$$

Inverze

Inverzí permutace π rozumíme dvojici obrazů r_k, r_l v matici (10), níž je větší číslo před menším, tj. $r_k > r_l$. Přitom tato čísla nemusí být v zápise permutace vedle sebe.
Pokud tedy v zápise permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k & ... & l & ... & n \\ r_1 & r_2 & ... & r_k & ... & r_l & ... & r_n \end{pmatrix}$$

je $r_k > r_l$, **tvoří tato dvě čísla jednu inverzi**.

Znaménko permutace

Znaménkem znπ (nebo sgnπ) permutace π rozumíme hodnotu výrazu $(-1)^k$, kde k je počet všech **inverzí** permutace π. Zapisujeme

$$\text{zn}\pi = (-1)^k.$$

Permutaci o sudém počtu inverzí nazýváme **sudou permutací**. Permutaci o lichém počtu inverzí pak nazýváme **lichou permutací**. Hodnotu funkce znπ nazýváme **paritou** permutace. Sudá permutace má paritu $+1$, lichá potom -1.

Příklady permutací a určení jejich znamének:

a) Permutace π_1 na množině $M = \{1, 2, 3\}$:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \qquad \mathrm{zn}\pi_1 = (-1)^1 = -1.$$

b) Permutace π_2 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k = 3, \qquad \mathrm{zn}\pi_2 = (-1)^3 = -1.$$

c) Permutace π_3 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 4, \qquad \mathrm{zn}\pi_3 = (-1)^4 = 1.$$

Příklad 41. *Determinant matice druhého řádu:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Jedna inverze v pořadí, proto znaménko minus.