7.4 Permutace množiny

Příklad 28. *Vypočtěte následující determinanty. Hledejte společné rysy výrazů pro hodnoty determinantů matic 2. a 3. stupně. Potom se pokuste definovat determinant.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \ldots, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots$$

Poznatek z řešení příkladu 28:

Determinant matice je tvořen všemi takovými součiny, že z každého řádku a z každého sloupce matice je v každém z nich obsažen právě jeden prvek.

Těchto součinů je $n!$ (n faktoriál), kde n je stupeň matice. Část z nich je uvedena znaménkem „-“, část pak znaménkem „+“.

K vyslovení úplné definice determinantu zbývá už jenom říci, že o tomto znaménku rozhoduje pořadí, v jakém vybíráme činitele příslušného součinu z jednotlivých sloupců. Jedná se o **znaménko permutace sloupcových indexů**.

Řešení příkladu 28 můžeme zapsat takto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+ (-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

kde exponenty u -1 vyjadřují počet inverzí v odpovídajících permutacích sloupcových indexů. Znaménko mocniny pak odpovídá znaménku těchto permutací.

7.4.1 Permutace množiny

Permutací množiny M rozumíme každé vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M na sebe.

Uvažujme například množinu $M = \{1, 2, 3\}$. Potom zobrazení f, pro které platí $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, je permutací.

Permutace množiny M představuje určité uspořádání jejích prvků. To známe z kombinatoriky. Víme, že počet všech permutací $n-$prvkové množiny je roven $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (tj. n faktoriál).

Permutaci obvykle **značíme** písmenem π. Symbolicky ji můžeme zapsat jako zobrazení
$$\pi : M \to M.$$
Konkrétní permutace množiny $M = \{1, 2, 3\}$ zapisujeme takto:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Potom pro obrazy prvků množiny M platí například, že $\pi_1(2) = 2$, $\pi_2(1) = 3$, $\pi_3(2) = 3$ apod.

Poznámka. Množina všech permutací množiny M spolu s operací skládání permutací (tj. skládání zobrazení, protože permutace je zobrazení) tvoří grupu. Ukažte to na příkladě. Je tato grupa komutativní?

Obecnou permutaci na množině $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$ zapíšeme takto:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & ... & r_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

potom pro obraz prvku i množiny M platí

$$\pi(i) = r_i.$$

Inverze

Inverzí permutace π rozumíme dvojici obrazů r_k, r_l v matici (8), níž je větší číslo před menším, tj. $r_k > r_l$. Přitom tato čísla nemusí být v zápise permutace vedle sebe.
Pokud tedy v zápise permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k & ... & l & ... & n \\ r_1 & r_2 & ... & r_k & ... & r_l & ... & r_n \end{pmatrix}$$

je $r_k > r_l$, **tvoří tato dvě čísla jednu inverzi**.

Znaménko permutace

Znaménkem znπ (nebo sgnπ) permutace π rozumíme hodnotu výrazu $(-1)^k$, kde k je počet všech **inverzí** permutace π. Zapisujeme

$$\text{zn}\pi = (-1)^k.$$

Permutaci o sudém počtu inverzí nazýváme **sudou permutací**. Permutaci o lichém počtu inverzí pak nazýváme **lichou permutací**. Hodnotu funkce znπ nazýváme **paritou** permutace. Sudá permutace má paritu $+1$, lichá potom -1.

Příklady permutací a určení jejich znamének:

a) Permutace π_1 na množině $M = \{1, 2, 3\}$:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \qquad \mathrm{zn}\pi_1 = (-1)^1 = -1.$$

b) Permutace π_2 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k = 3, \qquad \mathrm{zn}\pi_2 = (-1)^3 = -1.$$

c) Permutace π_3 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 4, \qquad \mathrm{zn}\pi_3 = (-1)^4 = 1.$$

Příklad 29. *Determinant matice druhého řádu:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Jedna inverze v pořadí, proto znaménko minus.

7.5 Definice determinantu

Definice 7.1 (DETERMINANT)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice $n-$tého řádu nad tělesem T. Determinantem matice A rozumíme prvek tělesa T ve tvaru:*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{zn}\pi \cdot a_{1r_1} \cdot a_{2r_2} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace π množiny $1, 2, 3, \ldots, n$. Množina těchto permutací je označena symbolem S_n.

Příklad 30.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+(-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

7.6 Pravidla o počítání s determinanty

Pro počítání s determinanty platí následující pravidla. Tato pravidla se běžně uvádějí ve formě věty (nebo jednotlivých vět). Důkaz pak vesměs vychází z uvedené definice determinantu. My se zde spokojíme se seznamem těchto pravidel, doplněným ilustračními příklady.

1. Zaměníme-li vzájemně dva řádky (sloupce), změní determinant své znaménko.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

2. Jsou-li všechny prvky jednoho řádku (sloupce) rovny nule, je determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot(-3)+3\cdot0\cdot1)-(3\cdot0\cdot(-3)+2\cdot0\cdot1+1\cdot0\cdot1) = 0$$

3. Obsahuje-li matice dva stejné řádky (sloupce), je její determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1\cdot2\cdot6+2\cdot3\cdot4+3\cdot1\cdot5)-(3\cdot2\cdot4+2\cdot1\cdot6+1\cdot3\cdot5) = 0$$

4. Je-li řádek (sloupec) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (1\cdot 2\cdot k\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot k\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot k\cdot 5) - \\ &-(3\cdot 2\cdot k\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot k\cdot 6 + 1\cdot 3\cdot k\cdot 5) \\ &= 1\cdot 2\cdot k\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot k\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot k\cdot 5 - \\ &-3\cdot 2\cdot k\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot k\cdot 6 - 1\cdot 3\cdot k\cdot 5 = 0, \end{aligned}$$

Poznámka. Z porovnání posledních dvou příkladů plyne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Jedná se o projev následující vlastnosti determinantů.

5. Násobíme-li prvky jednoho řádku (sloupce) nějakým číslem, násobí se tímto číslem celý determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -26 = -2\cdot 13.$$

Důsledky:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$

(ii) $\det(k\cdot A) = k^n\cdot \det A$, kde n je stupeň matice A.

6. Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců).

Důsledek:
Možnost užití Gaussovy eliminace při výpočtu determinantu.

Příklad 31. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -3.$$

Příklad 32. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

7. Determinant matice transponované je stejný jako determinant matice původní.

$$\det A = \det A^T$$

8. Determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů jednotlivých matic (Cauchyho věta).

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důsledky:

(i) $A \cdot B \neq B \cdot A$, ale

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A).$$

(ii) $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \quad \wedge \quad \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$, potom platí

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Poznámka. Pro čtvercovou matici A stupně n platí, že následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $h(A) = n$, (ii) $\det A \neq 0$, (iii) A je **regulární**.