10 Soustavy lineárních rovnic

10.1 Základní pojmy

Budeme uvažovat soustavu m lineárních rovnic o n neznámých s koeficienty z tělesa T (potom hovoříme o soustavě m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots& \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{14}$$

Se soustavou (14) jsou spojeny následující dvě matice.

Matice soustavy A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy A^*:

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Poznámka. Pro označení rozšířené matice používáme i jiné symboly než A^*. Například $Aroz$.

10.1.1 Maticový zápis soustavy

Užitím uvedených matic můžeme soustavu (14) zapsat ve tvaru

$$A \cdot \vec{u} = \vec{b},$$

kde $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ je vektor neznámých a $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ je vektor pravých stran rovnic soustavy. Tyto vektory můžeme chápat také jako matice, pak použijeme zápis

$$A \cdot X = B,$$

kde $X = \vec{u}$ a $B = \vec{b}$.

Často je výhodné hledět na soustavu (14) jako na **lineární kombinaci sloupcových vektorů matice** A:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Což stručněji zapíšeme ve tvaru:

$$x_1 \cdot \overline{a_1} + x_2 \cdot \overline{a_2} + ... + x_n \cdot \overline{a_n} = b.$$

Podle vektoru pravých stran $\vec{b}$ rozlišujeme soustavy (14) na dva typy:

1) Homogenní soustavy pro $\vec{b} = \vec{o} = (0, 0, ..., 0)$

2) Nehomogenní soustavy pro $\vec{b} \neq \vec{o}$

10.2 Řešitelnost soustavy

Zajímá nás, jak poznáme, zda má soustava řešení a kolik různých řešení může mít.

Věta 10.1 (Frobeniova věta)**.** *Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj.*

$$h(A) = h(A^*).$$

Důkaz. Frobeniova věta má formu ekvivalence. Můžeme ji schematicky vyjádřit takto:

$$\text{aspoň jedno řešení} \;\Leftrightarrow\; h(A) = h(A^*).$$

Dokazujeme tedy příslušné dvě implikace:

(1) aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ $h(A) = h(A^*)$

aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ ex. $x_1, x_2, ..., x_n$ tak, že $x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = b \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \Rightarrow [\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n] = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, b] \Rightarrow h(A) = h(A^*)$[1]

(2) $h(A) = h(A^*) \Rightarrow$ aspoň jedno řešení

$h(A) = h(A^*) \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \Rightarrow$ existuje řešení $x_1, x_2, ..., x_n$

□

Příklad 37. *Zjistěte, zda je řešitelná tato soustava*

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

[1] Zápisem $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n]$ rozumíme tzv. **lineární obal** množiny vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, což **je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů**. Více v předmětu *Lineární algebra a geometrie*.

Poznámka. Řešení soustavy lineárních rovnic může dopadnout trojím způsobem. Buď má právě jedno řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení a nebo řešení nemá. Jiná možnost není. Jak to dopadne, poznáme už při ověřování platnosti Frobeniovy podmínky takto:

(i) $h(A) = h(A^*) = n$ ... soustava má právě jedno řešení (tj. jednu uspořádanou $n-$tici),

(ii) $h(A) = h(A^*) < n$ ... soustava má nekonečně mnoho řešení,

(iii) $h(A) \neq h(A^*)$ ... soustava nemá řešení.

10.3 Homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Homogenní soustavou rozumíme soustavu rovnic, které mají na pravých stranách výhradně nuly. Pro takovou soustavu je vždy splněna Frobeniova podmínka. Homogenní soustava má tedy vždy řešení. Pokud je její matice regulární, tj. $h(A) = n$, má jediné - triviální - řešení, kterým je uspořádaná $n-$tice tvořená samými nulami. Pokud je matice soustavy singulární, tj. $h(A) < n$, má homogenní soustava nekonečně mnoho řešení. Tímto případem se teď budeme zabývat.

Příklad 38. *Řešte homogenní soustavu*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \end{array} \tag{16}$$

Poznámka. Dvě soustavy $A\vec{u} = \vec{o}$, $B\vec{u} = \vec{o}$ jsou ekvivalentní právě když řádkové vektory matic A, B generují stejný podprostor. Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic totiž odpovídají ekvivalentním úpravám odpovídající matice prováděným na jejích řádcích.

Řešení: Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$W_A = \{(s + 2t, -2s - 3t, s, t); s, t \in \mathbb{R}\},$$

Množina W_A je podprostorem vektorového prostoru R^4. Můžeme ji zapsat jako lineární obal dvou nezávislých vektorů:

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}] \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4.$$

Dimenze W_A je potom

$$\dim W_A = 2.$$

Věta 10.2. *Nechť je dána homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $\mathbb{R}$ a nechť matice A této soustavy má hodnost $h(A)$. Potom množina W_A všech řešení této soustavy je podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ a má dimenzi $n - h(A)$, tj.*

$$\dim W_A = n - h(A).$$

Důkaz. [1]

(1) Nejprve dokážeme, že W_A je podprostorem $\mathbb{R}^n$:
Využijeme následující vlastnosti maticových operací (A, B, C jsou matice, $r \in \mathbb{R}$) spolu s větou o určení podprostoru, kterou známe ze zimního semestru:

(i) $A(B + C) = AB + AC$,
(ii) $(rA)B = rAB = r(AB)$.

I. $u, v \in W_A; \Rightarrow Au = o,\ Av = o \Rightarrow Au + Av = o \Rightarrow A(u + v) = o \Rightarrow u + v \in W_A$.

II. $u \in W_A, \alpha \in \mathbb{R}; \Rightarrow Au = o \Rightarrow \alpha(Au) = o \Rightarrow A(\alpha u) = o \Rightarrow \alpha u \in W_A$.

[1] K tomuto důkazu nemáme vytvořen odpovídající pojmový aparát. Vrátíme se k němu v předmětu *Lineární algebra a geometrie*.

(2) Teď dokážeme, že $\dim W_A = n - h(A)$.
Důkaz naznačíme pro případ $n = 3$. Možnost zobecnění bude zřejmá. Využijeme větu o vztahu dimenzí jádra a obrazu homomorfismu. Tu sice ještě nemáme dokázanou, ale to napravíme během tohoto semestru.

Uvažujme homomorfismus

$$f(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3).$$

Pro jeho jádro $\mathrm{Ker} f$ a obraz $\mathrm{Im} f$ zřejmě platí:

$$\mathrm{Ker} f = W_A,$$

$$\mathrm{Im} f = [\{(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33})\}],$$

kde dimenze obrazu odpovídá hodnosti matice soustavy A, tj. $\dim \mathrm{Im} f = h(A)$. Potom, podle zmíněné věty, kterou si teprve dokážeme, platí

$$\dim \mathrm{Ker} f = \dim V - \dim \mathrm{Im} f. \tag{17}$$

Dimenze vektorového prostoru neznámých x_1, x_2, x_3 soustavy je v případě uvedeného homomorfismu rovna 3, obecně pak n. Po dosazení $\mathrm{Ker} f = W_A$, $\dim \mathrm{Im} f = h(A)$ a $\dim V = n$ do 17 dostaneme

$$\dim W_A = n - h(A) \tag{18}$$

□

10.3.1 Vytvoření báze vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy

Vraťme se k řešení příkladu 38. Viděli jsme, že si ho můžeme zapsat tvaru

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}].$$

V této kapitole si na příkladech ukážeme, jak se dají přímo najít vektory báze podprostoru W_A.

Postup řešení Příkladu 38:

1. Určíme tzv. základní neznámé

Provedeme Gaussovu eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Neznámé, které odpovídají prvním nenulovým prvkům na každém řádku matice v Gaussově tvaru (viz podtržení), nazveme **základní neznámé**. V našem případě se jedná o x_1 a x_2. Vzhledem k těmto neznámým pak řešíme soustavu, když zbývající neznámé ("nezákladní" nebo též "volné" neznámé) nahradíme reálnými parametry. V našem konkrétním případě tedy

základní nezn. : x_1, x_2; volné nezn. : $x_3 = s, \quad x_4 = t; \quad s, t \in \mathbb{R}$.

Odpovídající soustava má potom tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array} \tag{19}$$

2. Vypočítáme dimenzi prostoru řešení W_A

$$\dim W_A = n - h(A) = 4 - 2 = 2$$

3. Hledáme dvě nezávislá řešení $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ tvořící bázi W_A

Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ nejprve volíme takto:

$$\vec{b}_1 = (x_1, x_2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (y_1, y_2, 0, 1).$$

Potom je dosadíme do soustavy (19) a dopočítáme příslušné hodnoty x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\vec{b}_1 = (1, -2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (2, -3, 0, 1).$$

Obecné řešení $\vec{x}$ homogenní soustavy (38) pak můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$:

$$\vec{x} = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1); \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 39. *Řešte následující homogenní soustavu lineárních rovnic a určete bázi vektorového prostoru všech řešení této soustavy:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 0 \end{array} \tag{20}$$

Řešení:

$$W_A = [\{(2, 1, 0, 0, 0), (3, 0, 5, 1, 0), (7, 0, 12, 0, 1)\}]$$

Obecné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{x} = r(2, 1, 0, 0, 0) + s(3, 0, 5, 1, 0) + t(7, 0, 12, 0, 1); \quad r, s, t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Poznámka. Z tvrzení věty 10.2 plynou jasné závěry o počtu řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Je zřejmé, že hodnost matice A je vždy menší nebo rovna dimenzi n prostoru neznámých (počtu neznámých). Uvažujme nejprve $h(A) = n$. Po dosazení do vztahu $\dim W_A = n - h(A)$ dostaneme pro dimenzi prostoru řešení soustavy $\dim W_A = 0$. Jedná se tedy o triviální podprostor obsahující jediné - **triviální (nulové) řešení** soustavy. Pro $h(A) < n$ pak dostaneme $\dim W_A \neq 0$. Prostor řešení obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků - soustava má **nekonečně mnoho řešení** soustavy.

10.4 Nehomogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Zajímají nás zde hlavně neregulární soustavy, tj. soustavy, které mají nekonečně mnoho řešení. Ukážeme si, jak spolu souvisí řešení takové nehomogenní soustavy s řešením jí odpovídající soustavy homogenní. Začneme příkladem soustavy, která se, až na pravé strany, shoduje s homogenní soustavou (20) z příkladu 39.

Příklad 40. *Řešte následující soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 8 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 6 \end{array} \tag{22}$$

Řešení: Řešení

$$M = \{(-14 + 2k + 3l + 7m, k, -22 + 5l + 12m, l, m)\}$$

můžeme přepsat do tvaru, v němž je patrné řešení (21) příslušné **homogenní** soustavy (20):

$$M = \{(-14, 0, -22, 0, 0) + k(2, 1, 0, 0, 0) + l(3, 0, 5, 1, 0) + m(7, 0, 12, 0, 1)\}$$

Věta 10.3 (Řešení nehomogenní soustavy)**.** *Nechť $\vec{v}$ je libovolné řešení nehomogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ a W_A je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$. Pak pro množinu M všech řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ platí:*

$$M = \{\vec{v} + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

Poznámka. Věta 10.3 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení této soustavy a všech řešení příslušné homogenní soustavy**.

Důkaz. (1) $\{\vec{v}+\vec{u}\} \subseteq M; \quad A(\vec{v}+\vec{u}) = A\vec{v}+A\vec{u} = A\vec{v}+\vec{o} = A\vec{v} = \vec{b}$

(2) $M \subseteq \{\vec{v}+\vec{u}\}; \quad A\vec{w} = \vec{b},\ A\vec{v} = \vec{b} \Rightarrow A(\vec{w}-\vec{v}) = \vec{o} \Rightarrow$ existuje $\vec{u} = \vec{w}-\vec{v} \in W_A$ tak, že $A\vec{w} = A(\vec{v}+\vec{u}) = \vec{b}$. □

Závěr: Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj. $h(A) = h(A^*) < n$) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme $\vec{x}$.

2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho $\vec{v}$.

3. Množinu M všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = \vec{v}+\vec{x}$$

Poznámka. Množina všech řešení nehomogenní soustavy **netvoří vektorový prostor** (neobsahuje nulový vektor). Jedná se o tzv. **lineární množinu**. Později si ukážeme, že se jedná o afinní bodový podprostor.

10.5 Řešení regulárních soustav

Soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &...... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{23}$$

nazýváme **regulární**, jestliže je regulární její matice soustavy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

To znamená, když je matice A čtvercová řádu n (tj. m=n, neznámých je stejný počet jako rovnic) a její hodnost je rovněž n (nebo je splněna ekvivalentní podmínka $\det A \neq 0$). Sloupcové (řádkové) vektory regulární matice jsou tedy lineárně nezávislé a tvoří bázi vektorového prostoru V_n dimenze n :

$$V_n = [\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}] = [\{a_1, a_2, ..., a_n\}].$$

Připomeňme si, že soustavu (23) můžeme zapsat pomocí lineární kombinace sloupcových vektorů matice A :

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Protože $\vec{b} \in V_n$ a množina sloupcových vektorů $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ je bází V_n, je zřejmé, že existuje jediná $n-$tice $(x_1, x_2, ..., x_n)$ taková aby rovnost (24) platila. Regulární soustava (23) má tedy skutečně právě jedno řešení ve tvaru $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Příklad 41. *Řešte následující soustavu v* $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

10.5.1 Gaussova a Gaussova-Jordanova eliminace

Použijeme ekvivalentní úpravy k převedení matice na náležitý tvar. Soustava odpovídající výsledné matici má stejné řešení jako matice původní a přitom je jednodušší.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Řešení soustavy: $X = (-1, -1, 0, 1)$.

10.5.2 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo a jeho důkaz najdete na straně 43

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Spočítáme příslušné determinanty:

$$\det A = 81, \quad \det A_1 = -81, \quad \det A_2 = -81, \quad \det A_3 = 0, \quad \det A_4 = 81.$$

a dle Cramerova pravidla určíme řešení soustavy:

$$x_1 = \frac{-81}{81} = -1, \quad x_2 = \frac{-81}{81} = -1, \quad x_3 = \frac{0}{81} = 0, \quad x_4 = \frac{81}{81} = 1.$$

10.5.3 Užití inverzní matice

Řešenou soustavu můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$A \cdot X = B,$$

kde A je matice soustavy, B je matice pravých stran a X je matice neznámých. Potom pro X platí

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

kde A^{-1} je inverzní matice k matici A,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{27} & \frac{7}{27} & 0 & \frac{1}{27} \\ \frac{-1}{27} & \frac{-5}{27} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{27} \\ \frac{-2}{27} & \frac{-1}{27} & \frac{1}{3} & \frac{-13}{27} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Po vynásobení dostaneme:

$$X = A^{-1} \cdot B = (-1, -1, 0, 1).$$

10.6 Řešení soustav lineárních rovnic - cvičení

Úkol: Řešte dané soustavy. Nejprve ověřte platnost Frobeniovy podmínky. U regulárních soustav vyzkoušejte všechny výše uvedené metody.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 4 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \\ 3x - 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 6x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 13x_2 + 40x_3 - 16x_4 &= 13 \end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 16 \end{aligned}$$

(j)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}$$