7.8 Věta o rozvoji determinantu

Příklad 47. *Ukažte, že platí*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Potom ověřte, zda analogický „rozklad“ daného determinantu, ovšem pro jiný řádek nebo sloupec, vede ke stejnému výsledku.

Příklad 48. *Podle vzoru příkladu 47 dokončete rozklady:*

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

Definice 7.2 (Algebraický doplněk prvku matice)**.** *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Determinant matice, která vznikne z A vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce nazveme* **subdeterminantem** *a značíme M_{ij}. Číslo*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

nazveme **algebraickým doplňkem** *prvku a_{ij}.*

Definice 7.3 (Rozvoj determinantu)**.** *Je-li čtvercová matice řádu $n \geq 2$, pro každé $i = 1, 2, ..., n$ definujeme rozvoj matice A podle $i-$tého řádku jako výraz*

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$$

a pro každé $j = 1, 2, ..., n$ definujeme rozvoj matice A podle $j-$tého sloupce

$$a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Hodnoty těchto rozvojů jsou nezávislé na volbě řádku nebo sloupce a jsou ve všech případech rovny hodnotě determinantu matice A.

Věta 7.1 (O rozvoji determinantu - podle $i-$tého řádku)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice stupně n. Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Věta 7.2 (O rozvoji determinantu 2 - podle $i-$tého sloupce)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice stupně n. Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{kj} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Důkaz. - naznačení důkazu věty o rozvoji podle $i-$řádku na příkladu matice 3. řádu a jejího rozvoje podle druhého řádku.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot$$
$$(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^5 \cdot$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

$\square$

Poznámka. Z uvedených vět plynou následující vztahy, které pro nás budou zanedlouho důležité:

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + ... + a_{n1}A_{n2} = 0, \quad \text{pro } i \neq j, \tag{14}$$

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + ... + a_{n2}A_{n2} = \det A, \quad \text{pro } i = j. \tag{15}$$

7.9 Výpočet determinantu matice stupně $n > 3$

Využíváme tyto dvě metody:

1. Rozvoj determinantu podle řádku (sloupce).

2. Převedení matice na trojúhelníkový tvar užitím Gaussovy eliminace (při respektování vlivu úprav matice na hodnotu determinantu).

Poznámka. Většinou uvedené metody kombinujeme. Nejprve vhodnou manipulací s řádky (sloupci) zajistíme sloupec (řádek) s jediným nenulovým prvkem (aby měl příslušný rozvoj jenom jeden člen). Potom podle něj provedeme rozvoj.

Upozornění: Je třeba neustále myslet na to, jak příslušná manipulace s řádky (sloupci) mění hodnotu (třeba jenom znaménko) determinantu matice.

Příklad 49. *Vypočtěte determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix}.$$