ALGEBRA II
(studijní opora)

Roman HAŠEK

5. října 2019

Obsah

1 Lineární algebra

Slovo ALGEBRA pochází z arabského „al-jabr“, což znamená „nahrazení“. Toto slovo se objevilo v názvu knihy

Hisab al-džebr val-muqabala
(„Věda o redukci a vzájemném rušení“)

islámského matematika

Muhammada ibn Músá al-Chvárizmího
(790? - 850?, Chiva, Bagdád),

která je považována za vůbec první knihu o algebře.

Původně se jednalo o nauku o řešení rovnic. Dnešní algebra je daleko abstraktnější. Zabývá se studiem operací na množinách různých prvků a vlastnostmi **struktur**, které takto vznikají. Známými představiteli těchto struktur jsou **grupa** a **těleso**.

Základním rysem algebry je **označení studovaných objektů písmeny**. Tento formalismus navrhl *René Descartes* (1596 - 1650). Písmena ze začátku abecedy $(a, b, c, ...)$ měla reprezentovat libovolná čísla - parametry. Písmena z konce abecedy $(p, q, r, s, t, ..., x, y, z)$ pak měla představovat proměnné hodnoty konkrétních veličin (tlak, teplota, …, souřadnice).

Lineární algebra se zabývá vektory, maticemi, soustavami lineárních rovnic a vektorovými prostory.

2 Vektory

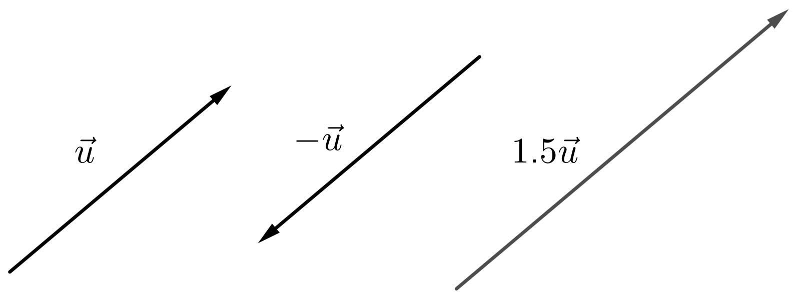
Ze školy znáte *vektory geometrické*, znázorňované orientovanými úsečkami, *vektory aritmetické*, zapisované uspořádanými $n-$ticemi reálných čísel, případně *vektory fyzikální*, vyjadřující velikosti a směry určitých fyzikálních veličin. Jistě také víte, že díky zavedení soustavy souřadnic můžeme mezi těmito dvěma reprezentacemi vektoru přecházet, orientované úsečce přiřadíme uspořádanou $n-$tici a naopak, uspořádané $n-$tici přiřadíme orientovanou úsečku.

V letním semestru se seznámíme s pojetím vektoru jako prvku *vektorového prostoru*, tj. množiny s určitými vlastnostmi. Pro názornou představu a praktické použití je však užitečné vědět, že vektor se používá tam, kde je třeba informovat o *velikosti* a *směru*. Z matematiky tak známe třeba *vektor posunutí* nebo *směrový vektor* přímky, z fyziky pak třeba *vektor síly* (fyzikální veličiny, u kterých kromě velikosti záleží také na směru, nazýváme vektorovými veličinami).

V matematice budeme pracovat s *volnými vektory*, tj. vektory, u kterých nezáleží na jejich umístění. Takový volný vektor potom můžeme definovat jako množinu všech orientovaných úseček stejné velikosti a směru. Tu z nich, kterou použijeme ke znázornění tohoto vektoru, nazýváme *umístěním* tohoto vektoru. Ve fyzice většinou pracujeme s *vázanými vektory*, u kterých záleží na umístění (je přece důležité, v jakém místě působí síla).

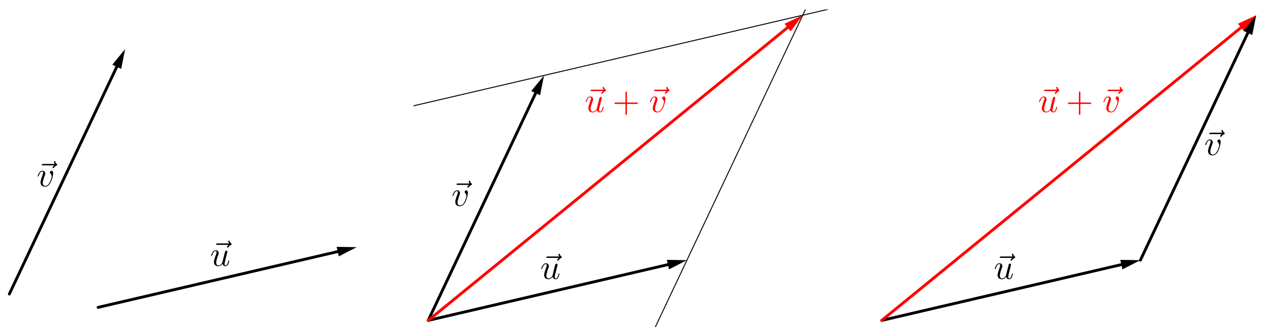
Geometrické vektory

Násobení vektoru skalárem:



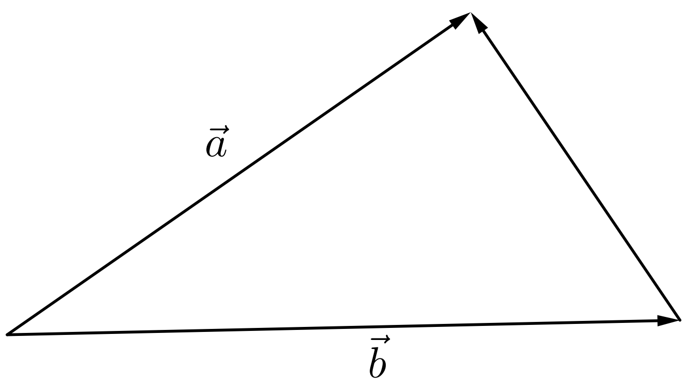
Obrázek 1: Násobení vektoru skalárem

Sčítání vektorů:



Obrázek 2: Sčítání vektorů

Příklad 1. *Vyjádřete nepojmenovaný vektor pomocí vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$.*



Obrázek 3: Zapište třetí vektor

Aritmetické vektory (uspořádané $n-$tice reálných čísel)

Násobení vektoru skalárem:

Aritmetické vektory můžeme násobit reálným číslem tak, že tímto číslem vynásobíme každý prvek vektoru.

$\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$;

$k\vec{u} = (ku_1, ku_2)$, $l\vec{a} = (la_1, la_2, la_3)$ kde $k, l \in \mathbb{R}$

$\vec{a} = (2, -3, 0)$; $5\vec{a} = (10, -15, 0)$

Sčítání vektorů:

Vektory se stejným počtem prvků pak můžeme sčítat tak, že sčítáme sobě odpovídající prvky.

$\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$;

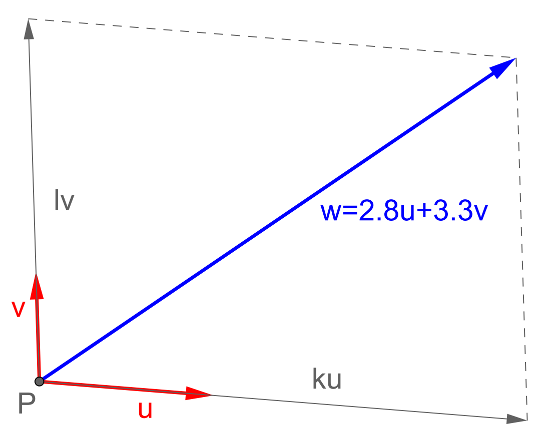
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

$\vec{z} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (-3, 0, -1)$;

$\vec{z} + \vec{w} = (-1, 1, -1)$.

Lineární kombinace vektorů

Spojením násobení vektorů skalárem a sčítání vzniká obecnější operace, *lineární kombinace vektorů.*



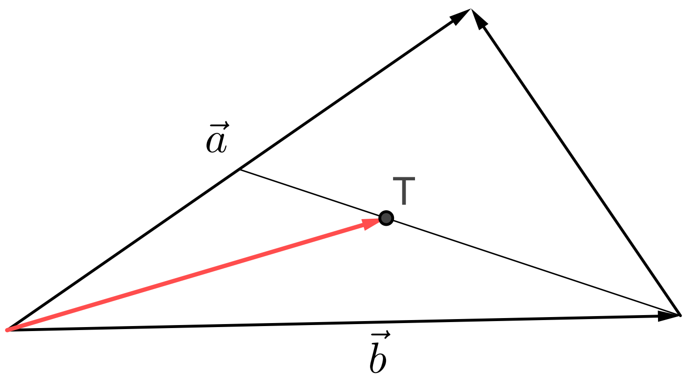
Obrázek 4: Lineární kombinace vektorů

Například, lineární kombinací vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je výraz $k\vec{u} + l\vec{v}$, kde čísla $k, l \in \mathbb{R}$ nazýváme *koeficienty lineární kombinace.*

Máme-li například tři vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o stejném počtu prvků, potom výraz $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$, kde $k, l, m \in \mathbb{R}$, nazýváme *lineární kombinace vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ s koeficienty k, l, m.* Výsledkem lineární kombinace vektorů je opět vektor.

Příklad 2. *Vytvořte lineární kombinaci $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$ pro vektory $\vec{a} = (-2, 1, 5), \vec{b} = (2, 0, 3), \vec{c} = (1, -3, 9)$ a koeficienty $k = -3, l = 2, m = 4$.*

Příklad 3. *Pomocí vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ zapište červený vektor, který směřuje do těžiště trojúhelníku na obrázku 5.*



Obrázek 5: Těžiště

Příklad 4. *Jaké musíme zvolit koeficienty, aby výsledkem lineární kombinace vektorů $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (5, 3)$ byl vektor $\vec{w} = (1, 2)$?*

3 Matice

Matice vznikly v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic. Pojem „matice“ (angl. matrix) zavedl v roce 1850 anglický matematik *James Joseph Sylvester* (1814–1897). Metoda řešení soustav odpovídající použití matic však byla známa již dlouho před tím[1].

Na řešení soustavy lineárních rovnic vede například úloha nalezení koeficientů *lineární kombinace vektorů*.

Příklad 5. *Určete koeficienty $x, y, z \in R$, pro které platí následující rovnost:* $x(2,0,-1) + y(1,3,5) + z(0,4,3) = (3,9,2)$.

Řešení: Úloha vede na řešení soustavy lineárních rovnice

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 3y + 4z &= 9 \\ -x + 5y + 3z &= 2, \end{aligned}$$

kterou si můžeme schematicky zapsat pomocí tzv. *rozšířené matice soustavy*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Tu potom upravíme užitím tzv. *Gaussovy eliminace*. Této metodě se budeme detailně věnovat později (viz str. 34). Zde si pouze uvedeme jednu z možných posloupností vzájemně ekvivalentních matic, které vedou k příslušné matici v *Gaussově tvaru*. Zvídavý čtenář si pak sám může promyslet jednotlivé úpravy odpovídající uvedeným maticím.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 6 & 7 \end{array}\right] \sim$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Příklad 6. *Řešte v R^3 soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1, & \sqrt{2}, & 5, & -0.14 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definice 3.1 (Matice). *Matice je obdélníkové nebo čtvercové uspořádání prvků do řádků a sloupců.*

Typ matice

Matice A je typu $(3, 3)$, matice B je typu $(3, 1)$, matice C a E jsou typu $(3, 4)$ a matice D je typu $(1, 4)$.

Typ matice zapisujeme buď ve tvaru (m, n) nebo ve tvaru $m \times n$ (čteme „m krát n“). Je-li potřeba informovat o typu matice, zapisujeme $A_{(3,3)}$, $B_{(3,1)}$, $C_{(3,4)}$ nebo $A_{3\times3}$, $B_{3\times1}$, $C_{3\times4}$.

Matice A je příkladem tzv. **čtvercové matice**. Konkrétně se jedná o čtvercovou matici řádu 3 (nebo 3. řádu, nebo 3. stupně).

Prvek matice

Jeho umístění v matici je udáno číslem řádku (index i) a číslem sloupce (index j).

Prvek matice A značíme a_{ij}, prvek matice M potom m_{ij}.

Příklad 7. *Je dána matice*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Určete hodnoty prvků m_{21}, m_{22}, m_{12} *této matice.*

Prvkem matice může být číslo, funkce nebo klidně zase matice.

Zápis matice

K zápisu matic budeme používat hranaté nebo kulaté závorky:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Rovnými závorkami pak budeme značit **determinant matice**:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Symbolický zápis matice

Matice označujeme velkými písmeny, např. $A, B, M, N, ...,$ jejich prvky potom odpovídajícími malými písmeny $a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, ...$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Příklady matic: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 3+4i & 2-3i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$,
$\begin{bmatrix} 1, 3, 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$.

Obdélníková matice $m \neq n$

Čtvercová matice $m = n$

Čtvercová matice typu (n, n) se nazývá **čtvercová matice** $n-$**tého řádu**.

Řádky a sloupce matice

Prvky matice jsou organizovány do řádků (řádkových vektorů) a sloupců (sloupcových vektorů).

$i-$tý řádek (řádkový vektor): $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) = a_i$

$j-$tý sloupec (sloupcový vektor): $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}) = \overline{a}_i$

Příklad 8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transponovaná matice k matici A: A^T

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]\,.$$

Příklad 9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hlavní diagonála matice

- je tvořena prvky se stejným číslem řádku a sloupce, tj. prvky a_{ii}.

Diagonální matice

- všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou rovny nule

Příklad 10.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Většinou se pod pojmem diagonální matice rozumí matice čtvercová. Někdy se však tento pojem zobecňuje i na obdélníkové matice.

Jednotková matice

- diagonální matice se všemi prvky na hlavní diagonále rovnými jedné, tj. $a_{ii} = 1$.

Příklad 11.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Jednotková matice je čtvercová. Je-li třeba, zapisujeme $I_{(n,n)}$ nebo $I_{n\times n}$, např. $I_{3\times 3}$.

Trojúhelníková matice

$$\text{horní: } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{dolní: } \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Trojúhelníková matice je čtvercová.

Symetrická matice: $\quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{tj.} \quad A^T = A$

Příklad 12.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Symetrická matice je čtvercová.

Příklad 13. *Zápis kuželosečky* $x^2 + 6xy + 9y^2 + 2y - 1 = 0$ *pomocí (symetrické) matice:*

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Antisymetrická matice: $\quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad \text{tj.} \quad A^T = -A$

Příklad 14.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Příklad 15. *Matice otočení kolem počátku o úhel* α*:*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Nulová matice: $a_{ij} = 0$

Příklad 16.

$$O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.1 Cvičení - Užití matic při řešení soustav lineárních rovnic

Lineární kombinace vektorů

1. Vytvořte uvedenou lineární kombinaci s danými vektory a koeficienty.

a) $k\vec{a}+l\vec{b}$; $\vec{a}=(1,3,0), \vec{b}=(-2,0,4); k=1, l=5,$

b) $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$; $\vec{a}=(2,10), \vec{b}=(-1,5), \vec{c}=(9,-7); k=4, l=3, m=-2,$

c) $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$; $\vec{a}=(4,3,-2), \vec{b}=(0,2,-1), \vec{c}=(3,1,-7); k=2, l=-3, m=5,$

d) $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$; $\vec{a}=(1,0,2), \vec{b}=(0,1), \vec{c}=(3,1,0); k=7, l=4, m=-2.$

2. Určete koeficienty příslušné lineární kombinace tak, aby platila uvedená rovnost.

a) $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{o}$; $\vec{a}=(1,3), \vec{b}=(-2,6), \vec{o}=(0,0)$ (*nulový vektor*),

b) $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=\vec{d}$; $\vec{a}=(1,0,1), \vec{b}=(0,1,-1), \vec{c}=(1,1,0), \vec{d}=(1,2,1).$

Soustavy lineárních rovnic

1. Řešte dané soustavy v R^2 (R^3)

(a) $\begin{aligned} x+y &= 5 \\ 2x+y &= 6 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x+y &= 5 \\ 2x+2y &= 6 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x+2y &= 5 \\ 2x+4y &= 10 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 2x+3y &= 1 \\ 3x-5y &= 2 \end{aligned}$

(e) $x+2y-z = 3$ (f) $x+y = 1$ (g) $\begin{aligned} x+2y-z &= 5 \\ 2x+y+z &= 7 \end{aligned}$

(h)
$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 2 \\ 4x + 3y - z &= 3 \\ 8x + 6y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

(j)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 9 \\ x - y + z &= 2 \\ x - 4y + 2z &= -3 \end{aligned}$$

Úlohy na další procvičení

2. Řešte dané soustavy v R^2 (R^3, R^4)

(a)
$$\begin{aligned} 2x - 6y &= 4 \\ -x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 5x - 15y &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} p + q - r &= 0 \\ 2p - q + 3r &= 3 \\ -p - q &= 6 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2u - v + 2w &= 2 \\ -u - v + 3w &= 1 \\ 3u - 2w &= 1 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x + z - 2w &= -3 \\ 2x - y + 2z - w &= -5 \\ -6y - 4z + 2w &= 2 \\ x + 3y + 2z - w &= 1 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 7z &= 15 \end{aligned}$$

Domácí úkol

Příklad 1: Řešte dané soustavy v R^2 (R^3, R^4)

(a) $$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 6u + v &= 5 \\ 3u - 2v &= 5 \end{aligned}$$

(c) $$x + 2y = 3$$

(d) $$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x + 2y &= 9 \\ 2x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} p + q - r &= 0 \\ 2p - q + 3r &= 3 \\ -p - q &= 6 \end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned} 2u - v + 2w &= 2 \\ -u - v + 3w &= 1 \\ 3u - 2w &= 1 \end{aligned}$$

Příklad 2: Určete hodnoty koeficientů a, b a c tak, aby soustava rovnic $ax + by + cz = 3$, $ax - y + cz = 1$, $x + by - cz = 2$ měla řešení $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

Příklad 3: Jaká množství 20% a 60% alkoholu musíme smísit, abychom dostali 50 litrů 30% alkoholu?

Příklad 4: Výlet lodí po proudu řeky do místa vzdáleného 75 km trvá 3 hodiny, zpáteční cesta proti proudu pak trvá 5 hodin. Určete průměrnou rychlost lodi vzhledem ke klidné vodě a průměrnou rychlost vody tekoucí v řece.

4 Algebraické operace s maticemi

4.1 Rovnost matic

$$A = B$$

Dvě matice se rovnají, jsou-li téhož typu a rovnají-li se jejich vzájemně si odpovídající prvky, tj. $a_{ij} = b_{ij}$.

Příklad 17.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

4.2 Sčítání matic

$$A + B$$

Odčítání matic $A - B$ definujeme pomocí ščítání a opačné matice k B:

$$A - B = A + (-B).$$

Sčítat (odčítat) můžeme pouze matice téhož typu. Výsledkem je matice, jejíž prvky jsou součtem (rozdílem) vzájemně si odpovídajících prvků daných matic.

Příklad 18. *Sčítání a odčítání matic:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ NELZE,

d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ NELZE.

Vlastnosti operace sčítání matic na množině matic typu (m, n):

i) neomezeně definovaná,

ii) komutativní

$$A + B = B + A,$$

iii) asociativní

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

iv) s neutrálním prvkem (nulová matice)

$$A + O = O + A = A.$$

v) s inverzními prvky (opačné matice)

$$A + (-A) = O.$$

Množina $M_{(m,n)}$ matic typu (m, n) tvoří spolu s operací sčítání matic **komutativní grupu**, zapisujeme $(M_{(m,n)}, +)$.

4.3 Násobení matice reálným číslem

$$k \cdot A,\ k \in R$$

Číslem k násobíme každý prvek matice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ k \in R,\ \text{potom k} \cdot \text{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$$

Příklad 19.

a) $2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 14 \\ -16 & 18 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 5 & 35 & 10 \\ 15 & 20 & 80 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 16 \end{bmatrix}$.

Příklad 20. *Vypočtěte:*

$$-3\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vlastnosti operace násobení matice reálným číslem (skalární násobení matice):

i) neomezeně definovaná,

ii) komutativní

$$kA = Ak,$$

iii) asociativní

$$k(lA) = (kl)A,$$

iv) distributivní

$$k(A + B) = kA + kB,$$

$$(k+l)A = kA + lA,$$

v) s jednotkovým prvkem (skalárem)

$$1A = A,$$

vi) násobení -1 (vznikne matice opačná):

$$(-1)A = -A,$$

vii) násobení 0 (vznikne matice nulová):

$$0A = O_{(m,n)}.$$

Příklad 21. *Vypočtěte hodnotu výrazu (výsledkem je matice)* $2A+3B$, *jsou-li dány matice:* $A = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Příklad 22. *Zjednodušte výraz:* $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Příklad 23. *Pro* $A = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 20 & 0 \\ -20 & 13 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ *určete* $A + 2(B - 2C)$

Příklad 24. *Pro* $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ *určete neznámou matici* X *v rovnici* $X + A = 0$.

4.4 Cvičení - Maticové operace

1. Pro následující matice určete hodnoty parametrů a, b a c, tak, aby platilo $A = B$:

a) $A = \begin{bmatrix} a^2 & 1 & c \\ 2 & 3 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -a & 1 & 4 \\ 2 & b & -1 \end{bmatrix}$,

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ a & 2 & 4 \\ 9 & 1 & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \\ b & 1 & 2 \\ 1+a & 2+c & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3+a & 2 \\ 1+b & a & 5 \\ b^2 & 1 & a^2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & c \\ 4 & a & 5 \\ b^2 & 1 & a^2 \end{bmatrix}$.

2. Určete hodnoty všech uvedených neznámých:

a) $\begin{bmatrix} x-3 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ y \\ z+4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x+y & 1 \\ 0 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

3. Určete hodnoty neznámých x, y v níže uvedených rovnicích, jestliže a, b, c a d jsou reálná čísla různá od nuly:

a) $\begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} ax+y \\ bx+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} ax+b & cy+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Pro uvedené matice A, B vypočítejte lineární kombinace s koeficienty k, l v uvedeném pořadí:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $k = 1$, $l = 3$,

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; $k = -1$, $l = 2$,

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $k = 4$, $l = -2$,

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $k = -3$, $l = 3$.

5. Řešte uvedené maticové rovnice pro neznámou matici X.

a) $X + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, b) $X + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $X + 3\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$, d) $X - \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,

6. Jsou dány matice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice (tzv. maticová rovnice):

a) $2X - A = B$, b) $X + 2B + A = I$,

c) $B^T - 2I = A + X$, d) $X - A^T = 3B - 2X - A$,

e) $3X + B^T = 2A + X - B$.

7. Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice:
$2(I - X) + A^T = 2A + 3(X - B + 2C)$.

Domácí úkol

Příklad 1: Řešte maticovou rovnici pro neznámou matici X:

$$X - \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Příklad 2: Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice

$2(I - X) + A^T = 2A + 3(X - B + 2C)$.

4.5 Násobení matic

Skalární součin vektorů

Přesněji *Eukleidovský skalární součin*. Uvažujme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Potom jejich skalárním součinem rozumíme operaci, jejímž výsledkem je číslo (skalár) a která je dána předpisem:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n.$$

Příklad 25. *Uvažujme vektory* $\vec{u} = (1, 5, 3)$, $\vec{v} = (0, -2, 1)$, $\vec{w} = (7, 2)$. *Potom*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -7$$

ale součiny $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ *nemají smysl.*

Poznámky. Skalární součin

1) Skalárně lze násobit pouze vektory se stejným počtem prvků, tj. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 5, 3) \cdot (7, 2)$ nemá smysl.

2) Výsledkem skalárního součinu je reálné číslo (skalár).

3) Skalární součin souvisí s odchylkou (úhlem) φ příslušných dvou vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi$$

Potom

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Násobení matic

$$A \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Poznámky. Násobení matic

1) Ne každé dvě matice lze násobit. Například pro matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ má smysl násobení v pořadí $B \cdot A$, ale v pořadí $A \cdot B$ je násobit nelze. Nabízí se otázka „Jak poznáme, zda jsou dvě matice v příslušném pořadí násobitelné?“ Lze využít jejich typy. Například násobení

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

můžeme napsat pomocí typů zúčastněných matic takto:

$$(2, 2) \cdot (2, 3) = (2, 3).$$

Porovnejme tento zápis se zápisem násobení

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

které nemá smysl:

$$(2, 3) \cdot (2, 2).$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je jistě již zřejmá.

2) Násobení matic není komutativní.

Příklad 26. *Pro matice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ *platí:*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 11 & 26 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}.$$

Příklad 27. *Jsou dány matice* $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$. *Dokažte:*

a) $AB = BA$, *b)* $AC \neq CA$,

c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, *d)* $(A+C)^2 \neq A^2 + 2AC + C^2$.

Vlastnosti operace násobení matic (za předpokladu, že je pro dané matice definováno):

i) asociativní

$$(AB)C = A(BC)$$

,

ii) nulová matice (značíme ji O)

$$AO = O,\ OA = O$$

,

iii) jednotková matice (značíme ji I nebo E)

$$AI = IA = A$$

,

iv) $(+,\cdot)-$distributivní

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$$

.

Poznámka. Uvažujme množinu $M_{n\times n}$ všech čtvercových matic téhož řádu n. Je zřejmé, že operace násobení matic je na této množině *neomezeně definovaná* (Zdůvodněte!). Přidáme-li k neomezené definovanosti ještě výše uvedené vlastnosti (i)–(iii) (tj. bez distributivnosti), můžeme říci, že algebraická struktura $(M_{n\times n},\cdot)$ tvoří tzv. *monoid*. Není struktura $(M_{n\times n},\cdot)$ rovnou *grupou*? Jaké vlastnosti by musela ještě mít?

4.6 Cvičení - Násobení matic

1. Pro následující dvojice matic A, B určete součin AB (pokud existuje, určete také BA):

a) $A = \left[\, 1,\ -4,\ 2,\ 3 \,\right],\ B = \left[\, 2,\ 1,\ -1,\ 2 \,\right]^T;$

b) $A = \left[\, 2,\ 0 \,\right],\ B = \left[\, 3,\ -5 \,\right]^T;$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T;$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

2. Pro dané matice A, B vypočítejte součiny AB a BA:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix};$

b) $A = \left[\, 1,\ 4,\ 5,\ 7 \,\right];\ B = \left[\, 2,\ -5,\ 3,\ 2 \,\right]^T;$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix};$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix};$

e) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$;

f) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Ukažte, že pro dané matice A, B platí $(AB)^T = BA$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Na daných maticích ukažte, že platí $(AB)^T = B^T A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odpovídá výsledek předchozího cvičení 3 platnosti vztahu $(AB)^T = B^T A^T$? Vysvětlete!

5. Ověřte platnost vztahu $(ABC)^T = C^T B^T A^T$:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$

Domácí úkol

Příklad 1: Vypočítejte součiny AB a BA pro následující matice:

$A = \left[\ 4,\ 1,\ 7,\ 5,\ 3\ \right],\ B = \left[\ 3,\ -1,\ 0,\ 1,\ 4\ \right]^T.$

Příklad 2: Na daných maticích ukažte, že platí $(AB)^T = B^T A^T$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5 Různé zápisy soustavy lineárních rovnic

Příklad 28. *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12. \end{aligned}$$

i) Přímý zápis

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12. \end{aligned}$$

ii) Zápis formou rozšířené matice soustavy

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

Obecně: $\overline{A} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$, kde A je matice soustavy a B je matice (sloupcový vektor) pravých stran.

iii) Zápis užitím násobení matic

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Obecně: $A \cdot X = B$, kde X je matice (sloupcový vektor) neznámých.

iv) Zápis jako lineární kombinace sloupcových vektorů matice A

$$x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ rozumíme výraz (vektor)

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n,$$

kde $k_1, k_2, ..., k_n$ jsou reálná čísla, kterým říkáme **koeficienty** lineární kombinace.

Příklad 29. *Jsou dány vektory* $\vec{a} = (1, 2, 5)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, $\vec{c} = (4, 1, 1)$. *Určete vektor*

$$5\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c},$$

který je jejich lineární kombinací.

6 Gaussova eliminace

Příklad 30. *Řešte v R^3 soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Řešení:

Metoda sčítací

Soustavu převedeme na trojúhelníkový tvar:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2y - z &= 3 \\ -y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ 5z &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$[x, y, z] = [-3, 2, 1]$

Metoda maticová

Použijeme Gaussovu eliminaci:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Gaussův tvar matice

6.1 Gaussova eliminační metoda

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých můžeme řešit uplatněním tzv. *Gaussovy eliminační metody* na její rozšířenou matici. Je založena na vytváření posloupnosti navzájem ekvivalentních matic (tj. jim odpovídající soustavy mají stejná řešení), která končí maticí v tzv. Gaussově tvaru. K tomu používáme následující ekvivalentní úpravy matic.

Ekvivalentní úpravy matic

1) Vzájemné prohození dvojice řádků matice.

2) Vynásobení řádku matice nenulovou konstantou (reálným číslem).

3) Přičtení (odečtení) násobku řádku matice k jinému řádku.

4) Odstranění nulového řádku.

Cílem postupného provádění těchto ekvivalentních úprav je:

Matice v Gaussově tvaru

- matice, u které na každém řádku přibyde zleva alespoň jedna nula oproti řádku předchozímu.

Příklady matic v Gaussově tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Příklady matic, které nejsou v Gaussově tvaru:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekvivalentní matice

Dvě matice, z nichž jedna vznikla z druhé výše uvedenými úpravami, nazýváme ekvivalentní. Soustavy rovnic, příslušné těmto dvěma maticím, mají stejná řešení. Ekvivalenci matic A, B značíme takto:

$$A \sim B.$$

6.2 Gauss-Jordanova eliminační metoda

Příklad 31. *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \end{array}\right] \sim .$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 120 & 120 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim .$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Pokud pokračujeme v ekvivalentních úpravách i po dosažení Gaussova tvaru, s cílem dostat nuly i nad hlavní diagonálou a v hlavní diagonále samé jedničky, provádíme tzv. **Gauss-Jordanovu eliminaci**. Tu lze použít k řešení soustavy, která má právě jedno řešení (jedná se o tzv. *regulární* matici). Toto řešení (v našem příkladě uspořádanou trojici hodnot $[x, y, z] = [3, 1, 1]$) najdeme v posledním sloupečku matice v **Gauss-Jordanově tvaru** (viz červeně zvýrazněné hodnoty).

6.3 Cvičení

1. Dané soustavy řešte Gaussovou (Gaussovou–Jordanovou) eliminací:

a)
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 5,\\ 4x + y &= 13,\\ 3x + 4z &= 4, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0,\\ x - y + z &= 2,\\ x - y - z &= 10, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0,\\ -x + y &= 5,\\ x + 2z &= 6, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 9,\\ 3x + y &= 1,\\ -2x - 3y - z &= 0, \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3,\\ 2x + 3y + 4z &= 2,\\ -3x - 5y + 2z &= 4, \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3,\\ 4x + 3z &= 5,\\ 3x + 2y &= 1. \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 5,\\ 3x - y &= 1,\\ 5x + 4z &= -2. \end{aligned}$$

7 Aplikace Gaussovy eliminace

7.1 Řešení soustavy lineárních rovnic

V kapitole 6 jsme se seznámili s Gaussovou eliminací prostřednictvím jejího použití při řešení soustavy lineárních rovnic. Věnovali jsme se při tom především popisu této eliminační metody a představení jednotlivých úprav, které ji tvoří. Skutečnost, že řešíme soustavu rovnic tak prozatím ustoupila do pozadí. Detailní a obecný popis metody řešení soustav lineárních rovnic užitím eliminace nás teprve čeká. Klíčovou roli při rozhodování o řešitelnosti dané soustavy hraje v této metodě tzv. *Frobeniova věta*, která operuje s pojmem *hodnost matice*.

7.2 Hodnost matice

Hodností dané matice A rozumíme číslo, které je rovno počtu řádků matice v Gaussově tvaru (mějme na paměti, že nulové řádky nepočítáme), která je s maticí A ekvivalentní. Hodnost matice A značíme

$$h(A).$$

Poznámka. Po zavedení pojmů „vektorový prostor" a „dimenze" budeme hodnost matice definovat jako **dimenzi vektorového prostoru generovaného řádkovými (sloupcovými) vektory matice**.

Příklad 32. *Určete hodnost matice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Pro hodnost matice typu (m, n) platí:

$$h(A) \leq \min(m, n).$$

7.3 Regulární/singulární matice

Čtvercovou matici A nazýváme **regulární**, právě když je její hodnost $h(A)$ rovna jejímu stupni, tj. platí:

$$h(A) = n.$$

Příklad 33. *Která z následujících matic je regulární?*

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, *b)* $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$,

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, *d)* $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme **singulární**.

7.4 Výpočet inverzní matice

Nyní se vrátíme k násobení matic, jehož vlastnostmi jsme se zabývali na str. 27. Ukážeme si, že ke každé regulární čtvercové matici existuje *inverzní matice*, tj. inverzní prvek vzhledem k operaci násobení matic.

Nechť A je čtvercová matice stupně n. Matice X téhož stupně se nazývá **inverzní maticí k matici** A, jestliže platí

$$X \cdot A = A \cdot X = I, \tag{1}$$

kde I je jednotková matice stupně n. Inverzní matici značíme

$$A^{-1}.$$

K výpočtu inverzní matice můžeme využít Gauss-Jordanovu eliminaci, jak ilustruje následující příklad 34.

Příklad 34. *Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Řešení: Neznámou matici X můžeme zapsat obecně takto:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Potom lze rovnici (2) psát ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kterému odpovídají následující dvě soustavy, lišící-se jenom pravými stranami:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 3x_3 & = & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_4 & = & 0 \\ 4x_2 + 3x_4 & = & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Tyto soustavy řešíme najednou, pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace jedné společné „rozšířené“ matice:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]. \tag{3}$$

Potom:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Ze zadání příkladu je zřejmé, že nalezená matice X je matice inverzní k matici A.

ÚKOL: Ověřte, zda pro nalezenou matixi X platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Poznámka. Z postupu řešení příkladu 34 vyplývá, že inverzní matice existuje pouze k regulární matici, jinak by nebylo možné dostat v levé části výsledné dělené matice ve vztahu (3) matici jednotkovou. **Regulární matici** proto můžeme charakterizovat také jako čtvercovou matice, k níž **existuje matice inverzní**. V opačném případě hovoříme o matici **singulární**.

Zbývá vyřešit dvě otázky týkající se existence a výpočtu inverzní matice:

1) Pokud existuje inverzní matice, je jediná, nebo jich může být více?

2) Je nutné při výpočtu inverzní matice postupně použít obě pořadí násobení uvedená v definičním vztahu (1), nebo stačí jenom jedno z nich?

Ad 1) **Jednoznačnost existence inverzní matice**

Nabízí se otázka, zda může k dané regulární matici existovat více navzájem různých inverzních matic. Odpovědí je, že ne. Platí toto tvrzení: „Pokud k matici A existuje inverzní matice, je jediná.“

Jeho důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existují dvě matice B a C, které splňují definici inverzní matice k A, tj. $AB = BA = I$ a $AC = CA = I$. Potom ale $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$, což je spor. Předpoklad tedy není správný, existuje jediná inverzní matice k A (pokud existuje).

Ad 2) **Výpočet inverzní matice**

Při výpočtu inverzní matice k A budeme využívat následující vlastnost:

„Jestliže A je regulární matice a pro matici X platí buď $AX = I$ nebo $XA = I$, je X maticí inverzní k A, tj. $X = A^{-1}$.“

Při důkazu uvedené vlastnosti předpokládáme platnost vztahu $AX = I$ a snažíme se dokázat platnost vztahu $XA = I$. Přitom ještě využijeme definici inverzní matice. Platí $XA = IXA = (A^{-1}A)XA = A^{-1}(AX)A = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$.

Poznatky získané řešením příkladu 34 na str. 39 a výše uvedené důkazy jednoznačnosti existence inverzní matice a postačující podmínky pro určení inverzní matice završíme formulací názvu použité metody a jejího schematického znázornění:

Výpočet inverzní matice užitím Gaussovy-Jordanovy eliminace:

$$\left[\, A \,\middle|\, I \,\right] \sim \ldots \sim \left[\, I \,\middle|\, A^{-1} \,\right]. \tag{4}$$

Příklad 35. *Určete inverzní matici k matici*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pro regulární matice A, B téhož stupně platí:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \tag{5}$$

ÚKOL: Ukažte platnost vlastnosti (5) na příkladu matic:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Vlastnost podobná (5) platí i pro **transponované matice**, tj.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \tag{6}$$

ÚKOL: Ukažte platnost této vlastnosti na příkladu matic:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

7.5 Řešení maticových rovnic

Maticovými rovnicemi budeme rozumět rovnice ve tvarech $AX = B, XA = B$ nebo $AXB = C$, kde A, B, C, X jsou matice, přitom A, B, C jsou dány, zatímco X je neznámá. Každou takovouto rovnici můžeme řešit postupem, který jsme použili na počátku řešení příkladu 34 (kde jsme vlastně řešili maticovou rovnici ve tvaru $AX = B$) a který byl založen na reprezentaci neznámé matice X pomocí jejích (neznámých) prvků $x_1, x_2, ...x_{m+n}$ (pro matici X typu (m, n)) a následném řešení soustavy $m+n$ lineárních rovnic s těmito prvky jako neznámými.

Nyní si uvedeme další dvě metody řešení maticových rovnic, obě založené na eliminaci. První z nich spočívá v přímé aplikaci eliminace k vyřešení rovnice, druhá pak využívá eliminaci k nalezení inverzní matice, která je následně použita k vyřešení rovnice.

7.5.1 Řešení maticových rovnic eliminací

a) Rovnice typu $AX = B$

Použijeme postup (3), kterým jsme na str. 39 získali k dané matici matici inverzní (jeho symbolický zápis (4) je uveden na str. 41). K rovnici $AX = B$ přiřadíme dělenou matici $[A|B]$, ke které Gauss-Jordanovou eliminací najdeme ekvivalentní matici ve tvaru $[I|R]$. Potom matice R je řešením dané rovnice, tj. $X = R$. Schematicky zapíšeme tento postup takto:

$$AX = B \to \left[\, A \,\middle|\, B \,\right] \sim ... \sim \left[\, I \,\middle|\, R \,\right].$$

b) Rovnice typu $XA = B$

Abychom mohli použít eliminaci, převedeme řešení této rovnice na úlohu předchozího typu. Využijeme k tomu známý vztah (viz str. 29, 41)

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T,$$

kde A, B jsou matice a operace „$\cdot$“ je násobení matic. Obě strany rovnice $XA = B$ proto nejprve transponujeme. Dostaneme tak rovnici $A^T X^T = B^T$, kterou řešíme výše uvedeným postupem pro rovnice typu $AX = B$. Musíme dát ale pozor na to, že získaná matice R na pravé straně výsledné dělené matice $[I|R]$ je transponovaná matice řešení dané rovnice, tj. $X = R^T$. Schematicky zapíšeme uvedený postup takto:

$$XA = B \to A^T X^T = B^T \to \left[\, A^T \,\middle|\, B^T \,\right] \sim \ldots \sim \left[\, I \,\middle|\, R \,\right] \to X = R^T.$$

c) Rovnice typu $AXB = C$ eliminací nepočítáme.

7.5.2 Řešení maticových rovnic užitím inverzní matice

Nyní si ukážeme, jak se dá k řešení všech tří typů maticových rovnic výhodně použít inverzní matice. Využijeme při tom definiční vztah (1) (viz str. 38) pro inverzní matici zapsaný ve tvaru

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I. \tag{7}$$

Inverzní matici počítáme užitím eliminace, jak je uvedeno na str. 41. Na str. 75 si uvedeme ještě jednu metodu výpočtu inverzní matice, užitím tzv. *adjungované matice*. Ta se ukáže jako velice efektivní pro výpočet inverzních matic „malých“ matic typu $(2, 2)$.

a) Rovnice typu $AX = B$

Užitím inverzní matice k matici A vyjádříme z rovnici neznámou matici X. Postupujeme (při odvození, k vlastnímu výpočtu potom použijeme jenom výsledek tohoto odvození) tak, že obě strany rovnice

$$AX = B \tag{8}$$

vynásobíme **zleva** maticí A^{-1} (směr násobení je důležitý a je třeba ho dodržet na obou stranách, protože, jak víme, násobení matic není komutativní). Dostaneme

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \tag{9}$$

což se dá díky (7) přepsat jako

$$IX = A^{-1}B, \tag{10}$$

tj.

$$X = A^{-1}B. \tag{11}$$

Výpočtem pravé strany vztahu (11) tak dostaneme řešení rovnice (8)

b) Rovnice typu $XA = B$

Podstata postupu řešení rovnice tohoto typu je stejná jeko u typu předchozího, akorát násobíme obě její strany maticí A^{-1} **zprava**. Aplikací analogických úprav pak postupně dostaneme rovnice

$$XA = B, \tag{12}$$

$$XAA^{-1} = BA^{-1}, \tag{13}$$

$$XI = BA^{-1}, \tag{14}$$

$$X = BA^{-1}, \tag{15}$$

kde, stejně jako v předchozím případě, využijeme pravou stranu výsledného vztahu (15) k přímému výpočtu řešení rovnice (12).

c) Rovnice typu $AXB = C$

Při řešení rovnice tohoto typu uplatníme oba předchozí postupy najednou tak, obě její strany násobíme nejprve maticí A^{-1} **zleva** a potom maticí B^{-1} **zprava**, přitom provádíme stejné úpravy jako v obou případech. Postupně tak dostáváme rovnice

$$AXB = C, \tag{16}$$

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}, \tag{17}$$

$$IXI = A^{-1}CB^{-1}, \tag{18}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}, \tag{19}$$

kde, opět, pravá strana výsledného vztahu (19) poslouží k přímému výpočtu řešení rovnice (16).

Příklad 36. *Jsou dány matice* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,
$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$. *Najděte neznámou matici* X *tak, aby platilo:*
a) $AX = B$, b) $XA = B$, c) $AXB = C$.

Příklad 37. *Řešte maticové rovnice*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$, b) $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$.

7.6 Lineární závislost vektorů

Definice 7.1 (Lineární závislost vektorů)**.** *Vektory* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ *nazýváme lineárně závislé právě tehdy, když lze jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, tj. když existuje takové* $k \in \{1, 2, ..., n\}$, *pro které lze vektor* $\vec{v}_k$ *zapsat takto:*

$$\vec{v}_k = c_1\vec{v}_1 + c_1\vec{v}_1 + ... + c_{k-1}\vec{v}_{k-1} + c_{k+1}\vec{v}_{k+1} + ... + c_n\vec{v}_n,$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n \in R$.

Ukážeme si, že Gaussova eliminace je efektivním nástrojem pro nalezení takového mezi danými vektory, který je lineární kombinací ostatních. Tak můžeme pomocí Gaussovy eliminace rozhodovat o lineární závislosti či nezávislosti dané skupiny vektorů.

Příklad 38. *Jsou dány vektory* $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (2, 1, 3), \vec{c} = (3, 0, 5)$. *Rozhodněte o jejich lineární závislosti.*

Řešení: Vytvoříme matici tak, že dané vektory tvoří její řádky. Jako čtvrtý sloupec, který umístíme vně matice, uvedeme jména vektorů. Potom Gaussovou eliminací přejdeme od dané matice k matici v Gaussově tvaru s ní ekvivalentní. Jednotlivé kroky eliminace provádíme vždy s celými řádky, čtvrté sloupce dílčích matic tak slouží k „zaznamenávání" těchto kroků. Výsledkem je následující posloupnost vzájemně ekvivalentních matic

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} - 2\vec{a} \\ \vec{c} - 3\vec{a} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} - 2\vec{a} \\ \vec{c} - 3\vec{a} - 2(\vec{b} - 2\vec{a}) \end{matrix} .$$

Důležitý je pro nás poslední řádek výsledné matice v Gaussově tvaru. Tento řádek je nulový, přitom v „kontrolním" (či „záznamovém") sloupečku je výraz $\vec{c} - 3\vec{a} - 2(\vec{b} - 2\vec{a})$. Po zjednodušení uvedeného výrazu můžeme tuto skutečnost interpretovat rovností

$$\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{o},$$

ze které je patrné, že kterýkoliv z vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Například pro $\vec{a}$ platí $\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c}$, vyjádření zbývajících vektorů je nasnadě. Můžeme proto konstatovat, že dané tři vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně závislé.

Zkušenost získanou řešením příkladu 38 využijeme k zefektivnění metody určování lineární závislosti/nezávislosti daných vektorů tak, abychom nemuseli k matici připojovat „záznamový" sloupeček. Z výsledku je zřejmé, že pokud jsou vektory lineárně závislé, musí Gaussovou eliminací vzniknout alespoň jeden nulový řádek, tj. hodnost matice musí být menší, než je počet zkoumaných vektorů (tj. počet řádků úvodní matice).

Postup vyšetřování lineární závislosti dané skupiny vektorů můžeme tedy formulovat takto: (i) *Vektory zapíšeme do matice jako její řádky.* (ii) *Gaussovou eliminací zjistíme hodnost této matice.* (iii) *Hodnost porovnáme s počtem daných vektorů.* (iv) *Pokud je hodnost menší než počet vektorů, jsou tyto vektory lineárně závislé. Pokud je hodnost stejná* *jako počet vektorů, jsou vektory lineárně nezávislé. Situace, kdy hodnost matice je větší než počet vektorů, nemůže nastat.*

Otázkami lineární závislosti a nezávislosti vektorů se detailně zabývá předmět *Lineární algebra a geometrie*. Tam je ukázáno a dokázáno , že pro vyšetřování lineární závislosti vektorů lze použít také matici, v níž jsou vektory organizovány do sloupců. Toto uspořádání je mnohdy výhodnější pro svou přímou korespondenci k řešení soustavy lineárních rovnic.

Řešení příkladu 38 nám ještě ukazuje možnost „alternativní“ definice lineární závislosti pomocí nulového vektoru následujícím způsobem.

Definice 7.2 (Lineární závislost vektorů)**.** *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ z vektorového prostoru V nad tělesem T se nazývají* **lineárně závislé***, právě když existuje aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\exists\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee ... \vee a_n \neq 0).$$

Poznámka. *Netriviální* je taková lineární kombinace, jejíž alespoň jeden koeficient je různý od nuly. Pokud jsou všechny koeficienty rovny nule, hovoříme o *triviální* lineární kombinaci.

Příklad 39. *Zjistěte, který z vektorů* $\vec{a}_1 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 5, 5, 1)$ *je lineární kombinací vektorů* $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\vec{a}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

Příklad 40. *Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé. Po zjištění lineární závislosti určete tu jejich lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.*

a) $\vec{a} = (2, 5, 7)$, $\vec{b} = (6, 3, 4)$, $\vec{c} = (5, -2, 3)$,

b) $\vec{a} = (6, 4, 2)$, $\vec{b} = (-9, 6, 3)$, $\vec{c} = (-3, 6, 3)$.

c) $\vec{a} = (-1, 0, 3)$, $\vec{b} = (4, 2, 0)$, $\vec{c} = (-5, -1, 9)$.

d) $\vec{a} = (1, 3, 5)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$,

e) $\vec{a} = (3, -8, 1)$, $\vec{b} = (-6, 16, -2)$,

f) $\vec{a} = (3, 2, 7)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (2, 0, 3)$,

g) $\vec{a} = (3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (5, 4, 2)$,

h) $\vec{a} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{c} = (3, 2, 1, 1)$,

i) $\vec{a} = (3, 0, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 0, 3)$, $\vec{d} = (1, 0, 3, 0)$.

7.7 Cvičení

1. Určete hodnosti daných matic:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\{3\}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$; $\{2\}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$; $\{2\}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$; $\{2\}$, e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & -14 & 28 & 7 \end{bmatrix}$; $\{2\}$,

f) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; $\{3\}$, g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -7 & 8 & 14 \\ 4 & 3 & -2 & -6 \\ -3 & -5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$; $\{3\}$,

h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 56 & 11 \\ 6 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$; $\{3\}$, i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\{3\}$,

j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\{5\}$, k) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\{3\}$.

2. Určete inverzní matice k daným maticím:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{f)} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

3. Dané soustavy řešte užitím inverzní matice:

$$\text{a)} \begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12. \end{aligned} \quad , \qquad \text{b)} \begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ x - z &= 1 \\ 2y + z &= 7. \end{aligned}$$

4. Vypočtěte matici X z rovnice:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)}\ X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. K daným maticím A, B vypočtěte A^{-1}, B^{-1}, $B^{-1}A^{-1}$ a $(A \cdot B)^{-1}$ a součiny $B^{-1}A^{-1}$ a $(A \cdot B)^{-1}$ vzájemně porovnejte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

8 Determinant matice

Determinant určujeme jenom u čtvercových matic.

Příklad 41. *Řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} x - y &= 1 && (20)\\ 2x + 3y &= 5. && (21) \end{aligned}$$

Řešení: Soustavu řešíme například sčítací metodou. Po odečtení dvojnásobku (22) od rovnice (23) dostaneme $y = \frac{3}{5}$. Dosazením do první rovnice pak dostaneme $x = \frac{8}{5}$.

Příklad 42. *Řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 && (22)\\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2. && (23) \end{aligned}$$

Řešení: Za předpokladu, že výraz $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ je různý od nuly, dostáváme toto řešení:

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

8.1 Užití determinantů při řešení soustavy lineárních rovnic

Cramerovo pravidlo

Dané soustavě dvou rovnic o dvou neznámých přiřadíme následující tři čtvercové matice a u každé z nich vypočítáme její determinant:

1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ … matice soustavy

Při výpočtu determinantu této (i dalších dvou) matice uplatníme tzv. **křížové pravidlo**, které usnadňuje výpočet determinantu u matic druhého řádu:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2. $A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}$ ... matice soustavy, u níž je **první sloupec nahrazen** sloupcovým vektorem pravých stran rovnic $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

$$\det A_1 = b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2$$

3. $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$ ... matice soustavy, u níž je **druhý sloupec nahrazen** sloupcovým vektorem pravých stran rovnic $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$:

$$\det A_2 = a_{11} \cdot b_2 - a_{12} \cdot b_2$$

Řešení dané soustavy lze potom, za předpokladu, že $\det A \neq 0$, zapsat ve tvaru

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}.$$

Aplikací uvedeného postupu na Příklad 41 dostaneme výsledky, které odpovídají jeho výše uvedenému řešení:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{3}{5}.$$

Tato metoda není spojena jenom se soustavou dvou rovnic o dvou neznámých. Lze ji použít při řešení jakékoliv (regulární) soustavy n lineárních rovnic o n neznámých. Této metodě řešení regulárních soustav se říká Cramerovo pravidlo. Obecně ji lze zapsat takto:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}; \quad \det A \neq 0.$$

Příklad 43. *Vypočtěte obsah rovnoběžníku, který je určen vektory* $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$.

Příklad 44. *Vypočtěte obsah rovnoběžníku, který je určen vektory* $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 5)$.

8.2 Zápis determinantu

Uvažujme matici druhého řádu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, potom determinant matice A zapíšeme ve tvaru

$$\det A \qquad \text{nebo} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

V případě matice řádu 2 pak již víme, že $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$,

8.3 Výpočet determinantu

Determinant je definován (Def.8.1) pro čtvercové matice všech řádů stejně. Pro matice řádů 1, 2, 3 a 4 se ale liší obvyklé způsoby jeho výpočtu. Nyní se s nimi seznámíme.

1. Matice řádu $n = 1$:

$$A = [a_{11}]\,, \qquad \text{potom} \qquad \det A = a_{11}.$$

2. Matice řádu $n = 2$: **KŘÍŽOVÉ PRAVIDLO**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{potom} \qquad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

3. Matice řádu $n = 3$: **SARRUSOVO PRAVIDLO**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

potom

$$\begin{aligned} \det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - \\ -(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}). \end{aligned}$$

Výpočet determinantu matice 3. řádu si usnadníme uplatněním následujícího schématického postupu:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Nejprve násobíme prvky matice v následujících třech liniích rovnoběžných s hlavní diagonálou a tyto součiny sečteme:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. , \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. , \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Tak dostaneme výraz

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \tag{24}$$

Potom opakujeme stejný postup pro následující tři směry rovnoběžné s druhou diagonálou:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Výsledkem je výraz

$$(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \tag{25}$$

Determinant matice A je potom roven rozdílu výrazů 24 a 25:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}).$$

4. Matice řádu $n > 3$: **ROZVOJ DETERMINANTU**

Rozvoji determinantu a jeho použití se zevrubně věnují kapitoly 8.8, 8.9.

Poznámka. Tato metoda výpočtu determinantu je použitelná pro matici jakéhokoliv řádu. Pro řády $n \leq 3$ však většinou volíme speciální metody uvedené výše.

5. TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE

Pro čtvercové matice libovolného stupně, které mají pod nebo nad hlavní diagonálou samé nuly je determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále.

Příklad 45. *Vypočtěte determinant matice*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Příklad 46. *Vypočtěte determinanty těchto matic:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

8.4 Permutace množiny

Příklad 47. *Vypočtěte následující determinanty. Hledejte společné rysy výrazů pro hodnoty determinantů matic 2. a 3. stupně. Potom se pokuste definovat determinant.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \ldots, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots$$

Poznatek z řešení příkladu 47:

Determinant matice je tvořen všemi takovými součiny, že z každého řádku a z každého sloupce matice je v každém z nich obsažen právě jeden prvek.

Těchto součinů je $n!$ (n faktoriál), kde n je stupeň matice. Část z nich je uvedena znaménkem „-“, část pak znaménkem „+“.

K vyslovení úplné definice determinantu zbývá už jenom říci, že o tomto znaménku rozhoduje pořadí, v jakém vybíráme činitele příslušného součinu z jednotlivých sloupců. Jedná se o **znaménko permutace sloupcových indexů**.

Řešení příkladu 47 můžeme zapsat takto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+(-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

kde exponenty u -1 vyjadřují počet inverzí v odpovídajících permutacích sloupcových indexů. Znaménko mocniny pak odpovídá znaménku těchto permutací.

8.4.1 Permutace množiny

Permutací množiny M rozumíme každé vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M na sebe.

Uvažujme například množinu $M = \{1, 2, 3\}$. Potom zobrazení f, pro které platí $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, je permutací.

Permutace množiny M představuje určité uspořádání jejích prvků. To známe z kombinatoriky. Víme, že počet všech permutací $n-$prvkové množiny je roven $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (tj. n faktoriál).

Permutaci obvykle **značíme** písmenem π. Symbolicky ji můžeme zapsat jako zobrazení

$$\pi : M \to M.$$

Konkrétní permutace množiny $M = \{1, 2, 3\}$ zapisujeme takto:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Potom pro obrazy prvků množiny M platí například, že $\pi_1(2) = 2$, $\pi_2(1) = 3$, $\pi_3(2) = 3$ apod.

Poznámka. Množina všech permutací množiny M spolu s operací skládání permutací (tj. skládání zobrazení, protože permutace je zobrazení) tvoří grupu. Ukažte to na příkladě. Je tato grupa komutativní?

Obecnou permutaci na množině $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$ zapíšeme takto:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots & r_n \end{pmatrix}, \tag{26}$$

potom pro obraz prvku i množiny M platí

$$\pi(i) = r_i.$$

Inverze

Inverzí permutace π rozumíme dvojici obrazů r_k, r_l v matici (26), níž je větší číslo před menším, tj. $r_k > r_l$. Přitom tato čísla nemusí být v zápise permutace vedle sebe.

Pokud tedy v zápise permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & n \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_k & \ldots & r_l & \ldots & r_n \end{pmatrix}$$

je $r_k > r_l$, **tvoří tato dvě čísla jednu inverzi**.

Znaménko permutace

Znaménkem znπ (nebo sgnπ) permutace π rozumíme hodnotu výrazu $(-1)^k$, kde k je počet všech **inverzí** permutace π. Zapisujeme

$$\mathrm{zn}\pi = (-1)^k.$$

Permutaci o sudém počtu inverzí nazýváme **sudou permutací**. Permutaci o lichém počtu inverzí pak nazýváme **lichou permutací**. Hodnotu funkce znπ nazýváme **paritou** permutace. Sudá permutace má paritu $+1$, lichá potom -1.

Příklady permutací a určení jejich znamének:

a) Permutace π_1 na množině $M = \{1, 2, 3\}$:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \qquad \mathrm{zn}\pi_1 = (-1)^1 = -1.$$

b) Permutace π_2 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k = 3, \qquad \mathrm{zn}\pi_2 = (-1)^3 = -1.$$

c) Permutace π_3 na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k = 4, \qquad \mathrm{zn}\pi_3 = (-1)^4 = 1.$$

Příklad 48. *Determinant matice druhého řádu:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Jedna inverze v pořadí, proto znaménko minus.

8.5 Definice determinantu

Definice 8.1 (DETERMINANT). *Nechť* $A = (a_{ij})$ *je čtvercová matice* $n-$*tého řádu nad tělesem* T. *Determinantem matice* A *rozumíme prvek tělesa* T *ve tvaru:*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{zn}\pi \cdot a_{1r_1} \cdot a_{2r_2} \cdot \ldots \cdot a_{nr_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace π *množiny* $1, 2, 3, \ldots, n$. *Množina těchto permutací je označena symbolem* S_n.

Příklad 49.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$
$$+ (-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

8.6 Pravidla pro počítání s determinanty (vlastnosti determinantu)

Pro počítání s determinanty platí následující pravidla. Tato pravidla se běžně uvádějí ve formě věty (nebo jednotlivých vět). Důkaz pak vesměs vychází z uvedené definice determinantu. My se zde spokojíme se seznamem těchto pravidel, doplněným ilustračními příklady.

1. Zaměníme-li vzájemně dva řádky (sloupce), změní determinant své znaménko.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

2. Jsou-li všechny prvky jednoho řádku (sloupce) rovny nule, je determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot 0\cdot 1+2\cdot 0\cdot(-3)+3\cdot 0\cdot 1)-(3\cdot 0\cdot(-3)+2\cdot 0\cdot 1+1\cdot 0\cdot 1) = 0$$

3. Obsahuje-li matice dva stejné řádky (sloupce), je její determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1\cdot 2\cdot 6+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 1\cdot 5)-(3\cdot 2\cdot 4+2\cdot 1\cdot 6+1\cdot 3\cdot 5) = 0$$

4. Je-li řádek (sloupec) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je determinant roven nule.

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= (1\cdot 2\cdot k\cdot 6+2\cdot 3\cdot k\cdot 4+3\cdot 1\cdot k\cdot 5)- \\ &-(3\cdot 2\cdot k\cdot 4+2\cdot 1\cdot k\cdot 6+1\cdot 3\cdot k\cdot 5) \\ &= 1\cdot 2\cdot k\cdot 6+2\cdot 3\cdot k\cdot 4+3\cdot 1\cdot k\cdot 5- \\ &-3\cdot 2\cdot k\cdot 4-2\cdot 1\cdot k\cdot 6-1\cdot 3\cdot k\cdot 5 = 0, \end{aligned}$$

Poznámka. Z porovnání posledních dvou příkladů plyne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot k & 2\cdot k & 3\cdot k \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Jedná se o projev následující vlastnosti determinantů.

5. Násobíme-li prvky jednoho řádku (sloupce) nějakým číslem, násobí se tímto číslem celý determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -26 = -2 \cdot 13.$$

Důsledky:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$

(ii) $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$, kde n je stupeň matice A.

6. Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců).

Důsledek:

Možnost užití Gaussovy eliminace při výpočtu determinantu.

Příklad 50. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -3.$$

Příklad 51. *Výpočet determinantu užitím eliminace k převedení matice na trojúhelníkový tvar:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

7. Determinant matice transponované je stejný jako determinant matice původní.

$$\det A = \det A^T$$

8. Determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů jednotlivých matic (Cauchyho věta).

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důsledky:

(i) $A \cdot B \neq B \cdot A$, ale

$$\det (A \cdot B) = \det (B \cdot A).$$

(ii) $\det (A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \quad \wedge \quad \det (A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$, potom dostáváme vztah pro výpočet determinantu inverzní matice $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, který uvádíme jako další vlastnost.

9. Determinant inverzní matice je roven převrácené hodnotě determinantu matice původní

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Poznámka. Pro čtvercovou matici A stupně n platí, že následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $h(A) = n$, (ii) $\det A \neq 0$, (iii) A je **regulární**.

8.7 Cvičení – vlastnosti determinantu

1. Napište čtvercovou matici 3. řádu takovou, že:

a) její determinant je roven 0.

b) její determinant je roven 0, ale žádné dva její prvky nejsou stejné.

2. Napište čtvercovou matici 3. řádu takovou, že:

a) její determinant je roven 7.

b) její determinant je roven 7, ale žádné dva její prvky nejsou stejné.

3. Bez přímého výpočtu určete hodnotu determinantu matice $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Výsledek zdůvodněte.

4. K dané matici $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ napište matici B, pro jejíž determinant platí:

a) $\det B = 8 \det A$.

b) $\det B = -\det A$.

5. Vypočtěte determinant matice $M = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Potom, bez přímého výpočtu určete determinanty matic:

a) $N = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, b) $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 24 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$,

c) $Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ -3 & 1 & 0 \\ 7 & 21 & 28 \end{bmatrix}$, d) $R = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 50 & 0 & 40 \\ -15 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

8.8 Věta o rozvoji determinantu

Příklad 52. *Ukažte, že platí*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Potom ověřte, zda analogický „rozklad“ daného determinantu, ovšem pro jiný řádek nebo sloupec, vede ke stejnému výsledku.

Příklad 53. *Podle vzoru příkladu 52 dokončete rozklady:*

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \dots$$

Definice 8.2 (Algebraický doplněk prvku matice)**.** *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Determinant matice, která vznikne z A vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce nazveme* **subdeterminantem** *a značíme M_{ij}. Číslo*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

nazveme **algebraickým doplňkem** *prvku a_{ij}.*

Definice 8.3 (Rozvoj determinantu)**.** *Je-li čtvercová matice řádu $n \geq 2$, pro každé $i = 1, 2, ..., n$ definujeme rozvoj matice A podle $i-$tého řádku jako výraz*

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$$

a pro každé $j = 1, 2, ..., n$ definujeme rozvoj matice A podle $j-$tého sloupce

$$a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Hodnoty těchto rozvojů jsou nezávislé na volbě řádku nebo sloupce a jsou ve všech případech rovny hodnotě determinantu matice A.

Věta 8.1 (O rozvoji determinantu - podle $i-$tého řádku)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice stupně n. Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Věta 8.2 (O rozvoji determinantu 2 - podle $i-$tého sloupce)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice stupně n. Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{kj} = \delta_{ij} \cdot \det A,$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Důkaz. - naznačení důkazu věty o rozvoji podle $i-$řádku na příkladu matice 3. řádu a jejího rozvoje podle druhého řádku.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

□

Poznámka. Z uvedených vět plynou následující vztahy, které pro nás budou zanedlouho důležité:

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + ... + a_{n1}A_{n2} = 0, \quad \text{pro } i \neq j, \tag{27}$$

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + ... + a_{n2}A_{n2} = \det A, \quad \text{pro } i = j. \tag{28}$$

8.9 Výpočet determinantu matice stupně $n > 3$

Využíváme tyto dvě metody:

1. Rozvoj determinantu podle řádku (sloupce).

2. Převedení matice na trojúhelníkový tvar užitím Gaussovy eliminace (při respektování vlivu úprav matice na hodnotu determinantu).

Poznámka. Většinou uvedené metody kombinujeme. Nejprve vhodnou manipulací s řádky (sloupci) zajistíme sloupec (řádek) s jediným nenulovým prvkem (aby měl příslušný rozvoj jenom jeden člen). Potom podle něj provedeme rozvoj.

Upozornění: Je třeba neustále myslet na to, jak příslušná manipulace s řádky (sloupci) mění hodnotu (třeba jenom znaménko) determinantu matice.

Příklad 54. *Vypočtěte determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix}.$$

8.10 Cvičení

1. Vypočtěte determinanty následujících matic. O správnosti výsledku se přesvědčte užitím nějakého počítačového programu, například wxMaxima, Maple nebo Derive.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -8 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{bmatrix}$,

h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, i) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, j) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & \cos x & -\sin x \\ 5 & \sin x & \cos x \end{bmatrix}$,

k) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, l) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, m) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$,

n) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ o) $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ p) $\begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$.

2. Vypočtěte determinanty matic (matice řádu vyššího než 3 řešte rozvojem i eliminací):

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

3. Pokuste se ukázat, že platí vztahy

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B, \quad \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B$$

a s jejich pomocí vypočtěte determinanty matic:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 9 & -5 \end{bmatrix}$.

4. Určete, pro která x je daná matice regulární:

a) $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 3 & x+1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x & x \\ x & 5 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 \\ x & 0 & x \end{bmatrix}$.

5. Vypočítejte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

6. Pro matici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ určete následující hodnoty:

a) $\det(A)$, b) $\det(A^{-1})$, c) $\det(A^T)$, d) $\det(5A)$.

7. Vypočítejte, pro která x je daná matice A regulární / singulární:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & x & -1 & x \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \end{bmatrix}.$$

9 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo představuje metodu řešení regulárních soustav lineárních rovnic pomocí determinantů.

Věta 9.1 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť $A \cdot x = b$ je soustava lineárních rovnic, kde A je regulární matice stupně n. Pro každé $j = 1, 2, ..., n$ označme A_j matici, která vznikne z matice A nahrazením $j-$tého sloupce sloupcovým vektorem b pravých stran rovnic dané soustavy. Potom pro každé $j = 1, 2, ..., n$ platí:*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

Důkaz. Nejprve si připomeňme větu o rozvoji determinantu podle sloupce. Plynou z ní tyto vztahy:

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + ... + a_{nj}A_{nk} = 0, \quad \text{pro } k \neq j, \tag{29}$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} = \det A. \tag{30}$$

Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n &= b_i \\
&\ldots\ldots \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n &= b_2
\end{aligned}$$

Obě strany každé rovnice vynásobíme algebraickým doplňkem A_{ij} koeficientu a_{ij} jejího $j-$tého členu $a_{ij}x_j$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \quad / \cdot A_{1j} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \quad / \cdot A_{2j} \\
&......\\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n &= b_i \quad / \cdot A_{ij} \\
&......\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{nn}x_n &= b_n \quad / \cdot A_{nj}
\end{aligned}
$$

Nakonec všechny rovnice sečteme. Po aplikaci vztahů (29), (30) na levou stranu tohoto součtu dostaneme postupně:

$$a_{1j}A_{1j}x_j + a_{2j}A_{2j}x_j + ... + a_{nj}A_{nj}x_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}$$

$$x_j \det A = \det A_j,$$

kde A_j je matice, která vznikne z matice A nahrazením jejího $j-$tého sloupce sloupcovým vektorem b pravých stran rovnic soustavy. □

Příklad 55. *Je dána soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých:*

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Užitím Cramerova pravidla určete hodnotu neznámé x_3.

10 Inverzní matice

Příklad 56. *Řešte maticovou rovnici*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Návod:

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot B &= C \\ X &= A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

10.1 Výpočet inverzní matice užitím eliminace

Metoda výpočtu inverzní matice užitím Gaussovy-Jordanovy eliminace je podrobně popsána na straně 39

10.2 Výpočet inverzní matice užitím adjungované matice

Definice 10.1 (Adjungovaná matice)**.** *Adjungovanou maticí k matici A rozumíme transponovanou matici doplňků prvků matice A. Matici doplňků dostaneme tak, že v matici A nahradíme každý prvek jeho algebraickým doplňkem.*

Poznámka. Adjungovanou matici k matici A značíme nejčastěji jedním z těchto způsobů:

$$\overline{A}, \qquad A^A, \qquad \mathrm{adj}A.$$

Příklad 57. *Adjungovaná matice k matici A třetího řádu:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Věta 10.1. *Nechť A je regulární matice. Potom pro inverzní matici A^{-1} k matici A platí tento vztah:*

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}}{\det A}. \tag{31}$$

10.3 Cvičení

1. Řešte užitím Cramerova pravidla:

a) $\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ x + y &= 3, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ 3x - 6y &= 9, \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + 4y &= 5 \\ x + 2y &= 6, \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - 2y &= 1. \end{aligned}$

2. Dokažte platnost vztahu (31). Nejprve pro matici třetího řádu, potom obecně.

3. Pokuste se formulovat algoritmus pro **rychlý výpočet** adjungované matice pro matici **druhého řádu**.

4. Dořešte příklad 56.

5. Vypočtěte matici X:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $X \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$,

c) $X \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 32 & 43 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 13 \\ 19 & 19 & 40 \\ 12 & 10 & 26 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

11 Řešení soustav lineárních rovnic

11.1 Lineární rovnice

Lineární rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ s reálnými koeficienty rozumíme rovnici ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{32}$$

kde koeficienty $a_1, a_2, ..., a_n, b$ jsou reálná čísla.

Označení „lineární" vyjadřuje skutečnost, že každá z neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ se v rovnici vyskytuje nejvýše v první mocnině. Pokud by nejvyšší mocninou, v níž se v rovnici vyskytuje proměnná, byla mocnina druhá, resp. třetí, hovořili bychom o rovnici kvadratické, resp. kubické (případně o rovnici druhého, resp. třetího stupně).

V případě rovnic o jedné, dvou či třech neznámých používáme pro označení neznámých a koeficientů často i jiné symboly než v (32), např. neznámé označujeme x, y a z a koeficienty a, b, c a d:

$$ax = b, \qquad ax + by = c, \qquad ax + by + cz = d.$$

11.2 Soustava lineárních rovnic

Budeme uvažovat soustavu m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty (obecně s koeficienty z tělesa[1] T; potom hovoříme o soustavě m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{33}$$

[1] „Tělesem" zde rozumíme algebraickou strukturu (již znáte algebraickou strukturu zvanou „grupa"). V kurzu lineární algebry a geometrie budeme pracovat výhradně s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Definice této algebraické struktury je uvedena v kapitole věnované vektorovému prostoru.

Se soustavou (33) jsou spojeny následující dvě matice.

Matice soustavy A**:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy A^***:**

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Poznámka. Pro označení rozšířené matice používáme i jiné symboly než A^*. Například $Aroz$.

11.3 Maticový zápis soustavy

Užitím násobení matic můžeme soustavu (33) zapsat ve tvaru

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

kde A je matice soustavy, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ je vektor neznámých a $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ je vektor pravých stran rovnic soustavy.

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{b}$ můžeme chápat také jako matice. Pak použijeme zápis

$$A \cdot X = B,$$

kde $X = \vec{x}$ a $B = \vec{b}$.

Často je výhodné hledět na soustavu (33) jako na rovnost **lineární kombinace sloupcových vektorů matice** A vektoru $\vec{b}$:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{34}$$

což stručněji zapíšeme ve tvaru:

$$x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = \vec{b}.$$

Podle vektoru pravých stran $\vec{b}$ rozlišujeme dva typy soustavy lineárních rovnic (33):

1) Pro $\vec{b} = \vec{o} = (0, 0, ..., 0)$ hovoříme o **homogenní soustavě**, symbolicky ji zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = O).$$

2) Pro $\vec{b} \neq \vec{o}$ hovoříme o **nehomogenní soustavě**, kterou symbolicky zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b};\ \vec{b} \neq \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = B;\ B \neq O).$$

11.4 Řešitelnost soustavy - Frobeniova věta

Zajímá nás, jak poznáme, zda má soustava řešení a kolik různých řešení může mít.

Příklad 58. *Rozhodněte o počtu řešení daných soustav. Potom je vyřešte a jejich řešení geometricky interpretujte.*

a)
$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + y + 5z &= -7, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 1 \\ x + 3y + 5z &= 1 \\ 3x + 6y + 9z &= 2, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y - 3z &= -1 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3. \end{aligned}$$

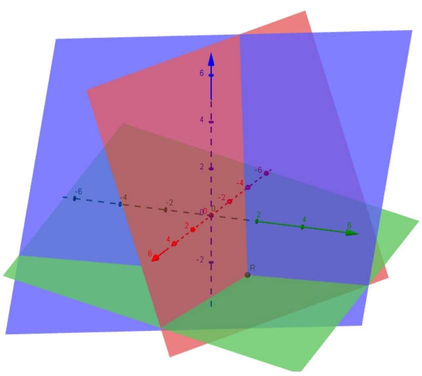
Řešení:

Provedeme Gaussovu eliminaci rozšířené matice každé z daných soustav:

ad a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= 6 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

$h(A) = h(A^*) = n$ (počet neznámých), soustava má jediné řešení (je regulární)



Obrázek 6: Řešení příkladu 1.1 a - tři roviny s jedním společným bodem

Řešení určíme například Gaussovou-Jordanovou eliminací (můžeme však použít také Cramerovo pravidlo, inverzní matici či přímé řešení soustavy):

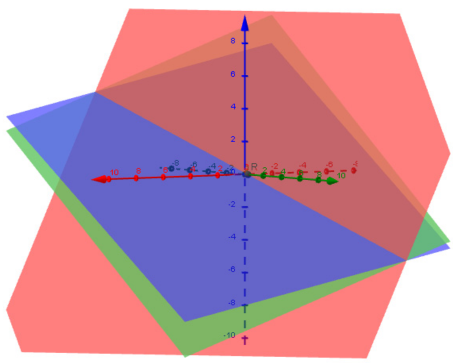
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice $X = [1, 2, -2]$. Geometricky toto řešení interpretujeme jako bod, který je společný třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 6.

ad b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \qquad \begin{aligned} x + 3y + 5z &= 1 \\ 3y + 6z &= 1 \end{aligned} \qquad (35)$$

$h(A) = h(A^*) < n$ (počet neznámých), soustava má nekonečně mnoho řešení



Obrázek 7: Řešení příkladu 1.1 b - tři roviny se společnou přímkou

Řešení určíme ze soustavy (35), která odpovídá matici v Gaussově tvaru ekvivalentní s rozšířenou maticí dané soustavy:

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 1 \\ 3y + 6z &= 1 \end{aligned}$$

Neznámé x, y, které odpovídají prvním nenulovým prvkům každého řádku matice v Gaussově tvaru zůstanou neznámými (tzv. „základní“ neznámé), zatímco neznámou z nahradíme reálným parametrem t (nejsme schopni určit hodnoty více neznámých než je počet nezávislých rovnic, proto tuto třetí neznámou uvažujeme jako „volnou“):

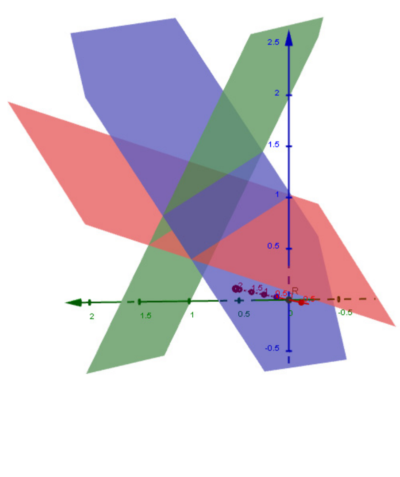
$$\begin{aligned} z &= t;\ t \in R \\ x + 3y &= 1 - 5t \\ 3y &= 1 - 6t \end{aligned}$$

Řešením soustavy je množina všech uspořádaných trojic $M = \{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]; t \in R\}$. Geometricky toto řešení interpretujeme jako přímku, která je společná všem třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 7.

ad c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \quad \begin{aligned} x + y - 3z &= 1 \\ y + 4z &= -1 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

$h(A) < h(A^*)$, soustava nemá řešení



Obrázek 8: Řešení příkladu 1.1 c - tři roviny nemají společný průnik

Množina řešení dané soustavy je prázdná: $M = \emptyset$. Geometricky lze tento závěr interpretovat tak, že roviny odpovídající daným rovnicím nemají (všechny tři) žádný společný bod, viz Obr. 8.

Věta 11.1 (Frobeniova věta)**.** *Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj.*

$$h(A) = h(A^*).$$

Důkaz. Frobeniova věta má formu ekvivalence. Můžeme ji schematicky vyjádřit takto:

$$\text{aspoň jedno řešení} \;\Leftrightarrow\; h(A) = h(A^*).$$

Dokazujeme tedy příslušné dvě implikace:

(1) aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ $h(A) = h(A^*)$

aspoň jedno řešení $\Rightarrow$ ex. $x_1, x_2, ..., x_n$ tak, že $x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = b \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Potom se jeho přidáním k matici tvořené vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ nemůže zvýšit její hodnost, tj. $h(A) = h(A^*)$. Symbolicky zapsáno: $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n] = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, b] \Rightarrow h(A) = h(A^*)$.[2]

(2) $h(A) = h(A^*) \Rightarrow$ aspoň jedno řešení

$h(A) = h(A^*) \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \Rightarrow$ existuje řešení $x_1, x_2, ..., x_n$ $\square$

[2] Zápisem $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n]$ rozumíme tzv. **lineární obal** množiny vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, což **je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů**. Více v partiích věnovaných pojmu „Vektorový prostor“.

Poznámka. Řešení soustavy lineárních rovnic může dopadnout trojím způsobem. Buď má právě jedno řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení a nebo řešení nemá. Jiná možnost není. Jak to dopadne, poznáme už při ověřování platnosti Frobeniovy podmínky takto:

(i) $h(A) = h(A^*) = n$ ... soustava má právě jedno řešení (tj. jednu uspořádanou $n-$tici),

(ii) $h(A) = h(A^*) < n$ ... soustava má nekonečně mnoho řešení (tj. nekonečně mnoho uspořádaných $n-$tic, které tvoří nějaký „podprostor“, např. přímku nebo rovinu),

(iii) $h(A) \neq h(A^*)$ ... soustava nemá řešení.

Příklad 59. *Rozhodněte o řešitelnosti daných soustav. U každé z nich rozhodněte, zda má právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, či zda nemá žádné řešení. Své tvrzení zdůvodněte.*

a)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 4x + 3y - z &= 7, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - 5z &= 2, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 4. \end{aligned}$$

11.5 Vztah mezi řešením nehomogenní a příslušné homogenní soustavy lineárních rovnic

Množiny řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic a k ní příslušné homogenní soustavy spolu úzce souvisí. Zajímá nás povaha tohoto vztahu, a jak ho můžeme využít při řešení nehomogenních soustav.

Příklad 60. *Řešte dané dané dvojice homogenních a nehomogenních soustav lineárních rovnic.*

a) $x + 2y = 0,$ $\qquad$ $x + 2y = 5,$

b) $\begin{aligned} -x+2y+z&=0 \\ x+y+2z&=0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x+2y+z&=7 \\ x+y+2z&=11. \end{aligned}$

Řešení:

ad a)

Řešení homogenní soustavy: $W = \{[-2t, t]; t \in R\} = \{t(-2, 1); t \in R\}$.

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5-2t, t]; t \in R\} = \{[5, 0] + t(-2, 1); t \in R\}.$$

ad b)

Řešení homogenní soustavy: $W = \{[-t, -t, t]; t \in R\} = \{t(-1, -1, 1); t \in R\}$.

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5-t, 6-t, t]; t \in R\} = \{[5, 6, 0] + t(-1, -1, 1); t \in R\}.$$

Věta 11.2 (Řešení nehomogenní soustavy)**.** *Nechť R je libovolné řešení nehomogenní soustavy $AX = B$ a W_A je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy $AX = O$. Pak pro množinu M všech řešení soustavy $AX = B$ platí:*

$$M = \{R + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

Důkaz. (1) $\{R+\vec{u}\} \subseteq M$; $\quad A(R+\vec{u}) = AR + A\vec{u} = AR + \vec{o} = AR = B$

(2) $M \subseteq \{R + \vec{u}\}$; $\quad AQ = B,\ AR = B \Rightarrow A(Q-R) = O \Rightarrow$ existuje $\vec{u} = Q - R \in W_A$ tak, že $AQ = A(R+\vec{u}) = B$. $\square$

Poznámka. Věta 11.4 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení R této soustavy a všech řešení $\vec{u}$ příslušné homogenní soustavy**.

Závěr: Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj. $h(A) = h(A^*) < n$) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme $\vec{x}$.

2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho R.

3. Množinu M všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = R + \vec{x}$$

Poznámka. Množina všech řešení nehomogenní soustavy tvoří tzv. **bodový prostor** (tj. je to množina bodů, také můžeme říci „množina míst“), zatímco množina všech řešení příslušné homogenní soustavy tvoří tzv. **vektorový prostor** (tj. je to množina vektorů, také můžeme říci „množina směrů“).

Prvky **bodového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 14 - Def. 2.1) nazýváme body. Každý bod, který je řešením nehomogenní soustavy, se dá vyjádřit jako součet jednoho konkrétního bodu a lineární kombinace vektorů (které jsou řešením příslušné homogenní soustavy).

Prvky **vektorového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 8 - Def. 1.1) nazýváme vektory. Každý vektor se dá vyjádřit jako lineární kombinace skupiny vektorů z téhož prostoru, kterou nazýváme **systém (množina) generátorů** daného vektorového prostoru.

Dimenze vektorového prostoru je číslo, které udává počet lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární kombinací mohu vytvořit každý vektor uvažovaného prostoru. Systém generátorů v.p., který je tvořen lineárně nezávislými vektory se nazývá **báze** vektorového prostoru. Dimenze je tak rovna počtu vektorů báze daného vektorového prostoru. Bod (počátek) má dimenzi 0, přímka dimenzi 1, rovina dimenzi 2 a prostor má dimenzi 3.

11.6 Homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Homogenní soustavou rozumíme soustavu lineárních rovnic, které mají na pravých stranách výhradně nuly (tj. všechny rovnice v soustavě jsou homogenní). Pro takovou soustavu je vždy splněna Frobeniova podmínka. Homogenní soustava má tedy vždy řešení - tzv. „triviální řešení“, které spočívá v tom, že za všechny neznámé dosadíme nuly (triviálním řešením je tedy uspořádaná $n-$tice tvořená samými nulami, též můžeme říci nulový vektor).

Pokud je matice homogenní soustavy regulární, tj. $h(A) = n$, má soustava jenom triviální řešení.

Pokud je matice soustavy singulární, tj. $h(A) < n$, má homogenní soustava nekonečně mnoho řešení a triviální řešení je jenom jedním z nich. Tímto případem homogenní soustavy se teď budeme zabývat.

Příklad 61. *Řešte homogenní soustavu*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \end{array} \tag{36}$$

Řešení: Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$W_A = \{(s + 2t, -2s - 3t, s, t); s, t \in \mathbb{R}\},$$

Množina W_A je podprostorem vektorového prostoru R^4. Můžeme ji zapsat jako lineární obal (tj. množinu všech lineárních kombinací) dvou nezávislých vektorů:

$$W_A = [\{(1,-2,1,0),(2,-3,0,1)\}] \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4.$$

Dimenze W_A je potom

$$\dim W_A = 2.$$

Věta 11.3. *Nechť je dána homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $\mathbb{R}$ a nechť matice A této soustavy má hodnost $h(A)$. Potom množina W_A všech řešení této soustavy je podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ a má dimenzi $n - h(A)$, tj.*

$$\dim W_A = n - h(A).$$

K důkazu této věty nemáme zatím vytvořeny potřebné teoretické základy. Vrátíme se k němu později.

11.6.1 Vytvoření báze vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy

Vraťme se k řešení příkladu 61. Viděli jsme, že si ho můžeme zapsat tvaru

$$W_A = [\{(1,-2,1,0),(2,-3,0,1)\}].$$

V této kapitole si na příkladech ukážeme, jak se dají přímo najít vektory báze podprostoru W_A.

Postup řešení Příkladu 61:

1. Určíme tzv. základní neznámé

Provedeme Gaussovu eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Soustava odpovídající výsledné matici v Gaussově tvaru má tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0. \end{array} \tag{37}$$

Neznámé, které odpovídají prvním nenulovým prvkům na každém řádku matice v Gaussově tvaru (viz podtržení), nazveme **základní neznámé**. V našem případě se jedná o x_1 a x_2. Vzhledem k těmto neznámým pak řešíme soustavu, když zbývající neznámé (”nezákladní” nebo též ”volné” neznámé) nahradíme reálnými parametry. V našem konkrétním případě tedy

$$\text{základní nezn.}: \quad x_1, x_2; \qquad \text{volné nezn.}: \quad x_3 = s, \quad x_4 = t; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2. Vypočítáme dimenzi prostoru řešení W_A

$$\dim W_A = n - h(A) = 4 - 2 = 2$$

3. Hledáme dvě nezávislá řešení $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ tvořící bázi W_A

Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ nejprve volíme takto:

$$\vec{b}_1 = (x_1, x_2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (y_1, y_2, 0, 1).$$

Potom je dosadíme do soustavy (37) a dopočítáme příslušné hodnoty x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\vec{b}_1 = (1, -2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (2, -3, 0, 1).$$

Obecné řešení $\vec{x}$ homogenní soustavy (61) pak můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$:

$$\vec{x} = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1); \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 62. *Řešte následující homogenní soustavu lineárních rovnic a určete bázi vektorového prostoru všech řešení této soustavy:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 0 \end{array} \tag{38}$$

Řešení:

$$W_A = [\{(2,1,0,0,0),(3,0,5,1,0),(7,0,12,0,1)\}]$$

Obecné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{x} = r(2,1,0,0,0) + s(3,0,5,1,0) + t(7,0,12,0,1); \quad r,s,t \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

Poznámka. Z tvrzení věty 11.3 plynou jasné závěry o počtu řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Je zřejmé, že hodnost matice A je vždy menší nebo rovna dimenzi n prostoru neznámých (počtu neznámých). Uvažujme nejprve $h(A) = n$. Po dosazení do vztahu $\dim W_A = n - h(A)$ dostaneme pro dimenzi prostoru řešení soustavy $\dim W_A = 0$. Jedná se tedy o triviální podprostor obsahující jediné - **triviální (nulové) řešení** soustavy. Pro $h(A) < n$ pak dostaneme $\dim W_A \neq 0$. Prostor řešení obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků - soustava má **nekonečně mnoho řešení** soustavy.

11.7 Nehomogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Zajímají nás zde hlavně neregulární soustavy, tj. soustavy, které mají nekonečně mnoho řešení. Již víme, jak spolu souvisí řešení takové nehomogenní soustavy s řešením jí odpovídající soustavy homogenní (viz Věta 11.4). Pokračujeme příkladem soustavy, která se, až na pravé strany, shoduje s homogenní soustavou (38) z příkladu 62.

Příklad 63. *Řešte následující soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 8 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 6 \end{array} \tag{40}$$

Řešení: Řešení

$$M = \{(-14 + 2k + 3l + 7m, k, -22 + 5l + 12m, l, m)\}$$

můžeme přepsat do tvaru, v němž je patrné řešení (39) příslušné **homogenní** soustavy (38):

$$M = \{(-14, 0, -22, 0, 0) + k(2, 1, 0, 0, 0) + l(3, 0, 5, 1, 0) + m(7, 0, 12, 0, 1)\}$$

Věta 11.4 (Řešení nehomogenní soustavy)**.** *Nechť $\vec{v}$ je libovolné řešení nehomogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ a W_A je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy $A\vec{x} = \vec{o}$. Pak pro množinu M všech řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ platí:*

$$M = \{\vec{v} + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

Poznámka. Věta 11.4 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení této soustavy a všech řešení příslušné homogenní soustavy**.

Důkaz. (1) $\{\vec{v} + \vec{u}\} \subseteq M; \quad A(\vec{v} + \vec{u}) = A\vec{v} + A\vec{u} = A\vec{v} + \vec{o} = A\vec{v} = \vec{b}$

(2) $M \subseteq \{\vec{v} + \vec{u}\}; \quad A\vec{w} = \vec{b},\ A\vec{v} = \vec{b} \Rightarrow A(\vec{w} - \vec{v}) = \vec{o} \Rightarrow$ existuje $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v} \in W_A$ tak, že $A\vec{w} = A(\vec{v} + \vec{u}) = \vec{b}$. □

Závěr: Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj. $h(A) = h(A^*) < n$) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme $\vec{x}$.

2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho $\vec{v}$.

3. Množinu M všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = \vec{v} + \vec{x}$$

Poznámka. Množina všech řešení nehomogenní soustavy **netvoří vektorový prostor** (neobsahuje nulový vektor). Jedná se o tzv. **lineární množinu**. Později si ukážeme, že se jedná o afinní bodový podprostor.

12 Řešení regulárních soustav

Soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{41}$$

nazýváme **regulární**, jestliže je regulární její matice soustavy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

To znamená, když je matice A čtvercová řádu n (tj. m=n, neznámých je stejný počet jako rovnic) a její hodnost je rovněž n (nebo je splněna ekvivalentní podmínka $\det A \neq 0$). Sloupcové (řádkové) vektory regulární matice jsou tedy lineárně nezávislé a tvoří bázi vektorového prostoru V_n dimenze n :

$$V_n = [\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}] = [\{a_1, a_2, ..., a_n\}].$$

Připomeňme si, že soustavu (41) můžeme zapsat pomocí lineární kombinace sloupcových vektorů matice A :

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Protože $\vec{b} \in V_n$ a množina sloupcových vektorů $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ je bází V_n, je zřejmé, že existuje jediná $n-$tice $(x_1, x_2, ..., x_n)$ taková aby rovnost (42) platila. Regulární soustava (41) má tedy skutečně právě jedno řešení ve tvaru $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Příklad 64. *Řešte následující soustavu v $\mathbb{R}^4$.*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

12.1 Gaussova a Gaussova-Jordanova eliminace

Použijeme ekvivalentní úpravy k převedení matice na náležitý tvar. Soustava odpovídající výsledné matici má stejné řešení jako matice původní a přitom je jednodušší.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Řešení soustavy: $X = (-1, -1, 0, 1)$.

12.2 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo a jeho důkaz najdete na straně 73

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Spočítáme příslušné determinanty:

$$\det A = 81, \quad \det A_1 = -81, \quad \det A_2 = -81, \quad \det A_3 = 0, \quad \det A_4 = 81.$$

a dle Cramerova pravidla určíme řešení soustavy:

$$x_1 = \frac{-81}{81} = -1, \quad x_2 = \frac{-81}{81} = -1, \quad x_3 = \frac{0}{81} = 0, \quad x_4 = \frac{81}{81} = 1.$$

12.3 Užití inverzní matice

Řešenou soustavu můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$A \cdot X = B,$$

kde A je matice soustavy, B je matice pravých stran a X je matice neznámých. Potom pro X platí

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

kde A^{-1} je inverzní matice k matici A,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{27} & \frac{7}{27} & 0 & \frac{1}{27} \\ \frac{-1}{27} & \frac{-5}{27} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{27} \\ \frac{-2}{27} & \frac{-1}{27} & \frac{1}{3} & \frac{-13}{27} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Po vynásobení dostaneme:

$$X = A^{-1} \cdot B = (-1, -1, 0, 1).$$

12.4 Cvičení – Soustavy lineárních rovnic

1. Řešte dané soustavy. Nejprve ověřte platnost Frobeniovy podmínky. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy. Pokuste o geometrickou interpretaci řešení soustav.

(a)
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= -3 \end{aligned}$$
$$\{[-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{4}]\}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}$$
$$\{[1 - 2t, -1 + t, t]\}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -3 \\ 2x - y + 3z &= 7 \\ x - 2y + 5z &= 1 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

(d)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 6 \\ 2x + y - 3z &= -3 \\ x - 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{[1, -2, 1]\}$$

(e)
$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - w &= 3 \\ 3x + y + 6z + 11w &= 16 \\ 2x - y + 4z + w &= 9 \end{aligned}$$
$$\{[5 - 2t, 1, t, 0]\}$$

(f)
$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ x + 3y - 4z &= -3 \\ 2x - 3y + 5z &= 7 \\ x - 8y + 9z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{[1, 0, 1]\}$$

(g)
$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 2 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \end{aligned}$$
$$\{[1 + 3s - 2t, s, t]\}$$

(h)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 7z &= 15 \end{aligned}$$
$$\{[-\tfrac{15}{2}, 23, -10]\}$$

(i)
$$x + 2y = 0$$
$$\{[-2t, t]\}$$

(j)
$$x + 2y = 3$$
$$\{[3 - 2t, t]\}$$

(k)
$$x - 3y + 2z = 0$$
$$\{[3s - 2t, s, t]\}$$

(l)
$$x - 3y + 2z = 3$$
$$\{[3 + 3s - 2t, s, t]\}$$

(m)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$
$$\{[-t, -t, t]\}$$

(n)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 12 \end{aligned}$$
$$\{[\tfrac{17}{3} - t, \tfrac{19}{3} - t, t]\}$$

(o)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

(p)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

2. Řešte soustavy lineárních rovnic, které jsou dány následujícími rozšířenými maticemi. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right]$, (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -7 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right]$, (c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right]$,

(d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 1 & 17 & 4 & -4 \end{array}\right]$, (e) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & -10 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$, (f) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 6 & -10 & 2 \end{array}\right.$

(g) $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$, (h) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & -7 & 9 \end{array}\right]$, (i) $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right]$,

(j) $\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$.

ŘEŠENÍ: (a) $\{[t, \frac{1}{3}-2t, t]\}$, (b) $\{[-7-2t, t, 2]\}$, (c) $\{[-8, 4+t, 8+2t, 1+t]\}$, (d) $\{[-3-11t, -1-t, 4+7t]\}$, (e) $\{[2-2s-5t, s, 1+t, 2t]\}$, (f) $\{[2t, -8+3t, t, 3]\}$, (g) $\{[1+3s-2t, s, t]\}$, (h) $\{[-5-3t, 19-4t, -6-2t, t]\}$, (i) $\emptyset$, (j) $\{[-1, -2, 0]\}$.

3. Určete množiny bodů, které jsou společné rovinám α, β, γ, které jsou dány obecnými rovnicemi:

a) $\begin{aligned} \alpha &: 3x + y - z - 7 = 0 \\ \beta &: x + 2y - 5z - 15 = 0 \\ \gamma &: 3x + 5y + 2z - 9 = 0, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \alpha &: x + y + z - 5 = 0 \\ \beta &: 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ \gamma &: 4x - y + 2z - 10 = 0, \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \alpha &: x + 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 3x - z - 6 = 0 \\ \gamma &: 7x - 4y - 5z - 16 = 0, \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \alpha &: x - 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 2x - 4y + 2z - 2 = 0 \\ \gamma &: -5x + 10y - 5z + 5 = 0. \end{aligned}$

4. Řešte dané soustavy lineárních rovnic:

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$

c)
$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 4 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \\ 3x - 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -6 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 6x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 13x_2 + 40x_3 - 16x_4 &= 13 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 16 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ:

(a) $[-1, -1, 0, 1]$; (b) $[1, 2, 1, -1]$; (c) $[1, 2, 3]$; (d) $[-2, 2, -3, 3]$; (e) $\emptyset$; (f) $[4 - t, \frac{2}{3}, t, -2t - \frac{7}{3}]$; (g) $[-\frac{1017}{175} + 2t, -\frac{283}{175} + t, t, -\frac{8}{175}]$; (h) $[1, 1, 1, 1]$; (i) $[1, -1, 0, 2]$; (j) $[2, 0, -2, -2, 1]$