

# Geometrie I

(studijní text)

**Roman HAŠEK**

3. října 2019

# Obsah

<b>1</b>	<b>Připomenutí vybraných pojmů</b>	<b>4</b>
1.1	Grupa . . . . .	4
1.2	Těleso . . . . .	5
1.3	Vektorový prostor . . . . .	5
1.4	Afinní bodový prostor . . . . .	6
1.5	Afinní souřadnice bodů . . . . .	7
1.6	Eukleidovský bodový prostor . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Geometrická zobrazení</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Afinní zobrazení</b>	<b>15</b>
3.1	Dělicí poměr . . . . .	15
3.2	Afinní zobrazení . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Afinní transformace roviny (Afinita)</b>	<b>18</b>
4.1	Analytické vyjádření afinity v rovině . . . . .	18
4.2	Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Shodná zobrazení v rovině</b>	<b>23</b>
5.1	Rovnice shodnosti v rovině . . . . .	24
5.2	Osová souměrnost . . . . .	34
5.2.1	Analytické vyjádření osově souměrnosti $\mathbf{O}(o)$ v rovině . . . . .	35
5.2.2	Osová souměrnost - Úlohy . . . . .	37
5.2.3	Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu . . . . .	38
5.3	Otočení . . . . .	39
5.3.1	Otočení - Úlohy . . . . .	41
5.3.2	Otočení - Úlohy na domácí přípravu . . . . .	41
5.4	Středová souměrnost . . . . .	42
5.4.1	Středová souměrnost - Úlohy . . . . .	43
5.4.2	Středová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu . . . . .	43
5.5	Posunutí (Translace) . . . . .	44
5.5.1	Analytické vyjádření posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině . . . . .	44
5.5.2	Posunutí - Úlohy . . . . .	45
5.6	Posunutě zrcadlení (Posunutá souměrnost) . . . . .	46
5.6.1	Analytické vyjádření posunutého zrcadlení . . . . .	48
5.6.2	Posunutě zrcadlení - Úlohy na domácí přípravu . . . . .	48

<b>6</b>	<b>Skládání shodností v rovině</b>	<b>49</b>
6.1	Skládání afinních zobrazení . . . . .	49
6.2	Skládání shodností v rovině . . . . .	49
6.3	Shodnosti přímé a nepřímé . . . . .	50
6.4	Grupa shodností v rovině . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Klasifikace shodností roviny</b>	<b>52</b>
7.1	Klasifikace shodností roviny . . . . .	52
7.2	Shodnosti v rovině - Úlohy . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Podobná zobrazení</b>	<b>57</b>
8.1	Podobné zobrazení . . . . .	57
<b>9</b>	<b>Stejnolehlost</b>	<b>59</b>
9.1	Analytické vyjádření stejnoolehlosti . . . . .	60
9.2	Skládání stejnoolehlostí . . . . .	60
9.3	Stejnolehlost kružnic . . . . .	61
9.3.1	Stejnolehlost – Úlohy . . . . .	63
9.3.2	Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu . . . . .	63
9.4	Podobnosti eukleidovské roviny . . . . .	64
9.4.1	Úlohy – Podobnosti . . . . .	65
<b>10</b>	<b>Mocnost bodu ke kružnici</b>	<b>66</b>
10.1	Chordála a potenční střed . . . . .	67
10.2	Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici . . . . .	68
<b>11</b>	<b>Osová afinita</b>	<b>69</b>
11.1	Základní afinity . . . . .	69
11.2	Osová afinita v rovině . . . . .	69
11.3	Cvičení – Osová afinita . . . . .	72
<b>12</b>	<b>Analytické vyjádření afinního zobrazení v rovině</b>	<b>73</b>

# 1 Připomenutí vybraných pojmů

## 1.1 Grupa

**Definice 1** ((Komutativní) grupa). *Grupou  $(M, *)$  rozumíme množinu  $M$  spolu s operací  $*$  na  $M$ , která má tyto vlastnosti:*

- i)  $\forall x, y \in M; x * y \in M$ ,  
*Operace  $*$  je neomezeně definovaná na  $M$ .  
(Množina  $M$  je uzavřená vzhledem k operaci  $*$ .)*
- ii)  $\forall x, y, z \in M; x * (y * z) = (x * y) * z$ ,  
*Operace (struktura) je asociativní.*
- iii)  $\exists e \in M, \forall x \in M; x * e = e * x = x$ ,  
*Existuje neutrální prvek vzhledem k  $*$ .  
(Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)*
- iv)  $\forall x \in M, \exists y \in M; x * y = y * x = e$ .  
*Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k  $*$ .  
(Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)*

*Je-li struktura  $(M, *)$  navíc komutativní, nazývá se komutativní grupa nebo též Abellova grupa.*

### Příklady grup

1.  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$ ,
2.  $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ ,
3. Množina povelů {stát, vlevo vbok, vpravo vbok, čelem vzad} spolu s operací skládání.

o	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

4. Uvažujme rovnostranný trojúhelník  $ABC$  v rovině  $\rho$ . Grupou je potom množina všech transformací roviny, v nichž se trojúhelník zobrazí sám na sebe, spolu s operací skládání transformací (hovoříme o tzv. dihedralní grupě, viz též grupy symetrií).

## 1.2 Těleso

Tělesem jako algebraickou strukturou rozumíme strukturu jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury  $(R, +, \cdot)$ .

**Definice 2.** *Struktura  $(T, +, \cdot)$  se nazývá těleso, právě když je  $(+, \cdot)$ -distributivní, když struktura  $(T, +)$  je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura  $(T - \{0\}, \cdot)$ , kde 0 je nulový prvek grupy  $(T, +)$ , je grupa (tzv. multiplikatívni grupa tělesa  $T$ ). Je-li navíc grupa  $(T - \{0\}, \cdot)$  komutativní, nazývá se  $T$  komutativní těleso.*

### Příklady těles

1.  $(Q, +, \cdot)$ ,
2.  $(R, +, \cdot)$ ,
3.  $(C, +, \cdot)$ .

## 1.3 Vektorový prostor

**Definice 3** (Vektorový prostor). *Nechť  $T$  je komutativní těleso. Množinu  $V$  nazveme vektorovým prostorem nad tělesem  $T$ , právě když jsou na  $V$  definovány dvě operace: (i) sčítání: libovolné dvojici  $\vec{u} \in V$ ,  $\vec{v} \in V$  je jednoznačně přiřazen prvek  $\vec{u} + \vec{v} \in V$ , (ii) násobení prvkem z tělesa  $T$  (skalárem): výsledkem násobení vektoru  $\vec{u} \in V$  skalárem  $a \in T$  je vektor  $a\vec{u} \in V$ , které splňují následující vlastnosti:*

- a) *Struktura  $(V, +)$  je komutativní grupa.*
- b) *Distributivnost:  $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ ,  $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ .*
- c) *Existence jednotkového prvku skalárního násobení:  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ .*

### Příklady vektorových prostorů

1. Množina  $R^2$  všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem definovanými následujícím způsobem:  $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ ,  $k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$  (jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor  $R^2$**  nad tělesem reálných čísel).
2. Množina geometrických vektorů v rovině (orientovaných úseček) spolu s operací skládání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, jak jsou známy ze školské matematiky.

## 1.4 Afinní bodový prostor

**Definice 4** (Afinní bodový prostor). Neprázdnou množinu  $A_n$  (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním<sup>1</sup> bodovým prostorem dimenze  $n$ , jestliže je dán vektorový prostor  $V_n$  dimenze  $n$  a zobrazení

$$g : A_n \times A_n \rightarrow V_n$$

těchto vlastností: 1. Pro každý bod  $A \in A_n$  a pro každý vektor  $\vec{x} \in V_n$  existuje jediný bod  $B \in A_n$  tak, že

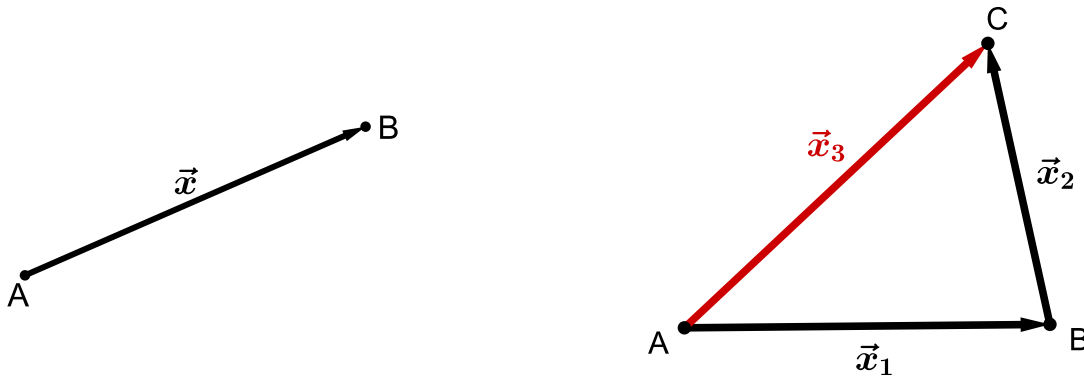
$$g(A, B) = \vec{x} \quad \text{t.j.} \quad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body  $A, B, C \in A_n$  platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

(Jedná se o tzv. Chaslesův vztah. Jeho platnost požadujeme v každém afinním bodovém prostoru<sup>2</sup>.)

Vektorový prostor  $V_n$  nazýváme vektorovým zaměřením afinního prostoru  $A_n$ .



### Příklady afinního bodového prostoru

1. Jednoprvková množina se zaměřením  $V_0 = \{\vec{0}\}$  je afinní bodový prostor dimenze 0.
2. Eukleidovský bodový prostor  $E_n$ , jehož formy pro  $n \leq 3$  nazýváme dle dimenze bod (značíme  $E_0$ ), přímka (značíme  $E_1$ ), rovina ( $E_2$ ) a trojrozměrný prostor ( $E_3$ ).
3. Samotný vektorový prostor  $V_n$  splňuje definici afinního bodového prostoru<sup>2</sup>. Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

<sup>1</sup>Affinis znamená latinsky příbuzný. Poprvé tento pojem použil Leonhard Euler (1707-1783) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělicí poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení*. Afinní geometrií rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

<sup>2</sup>Další vlastnosti operací *odčítání bodů* a *sčítání bodu a vektoru* jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf>, str. 15.

<sup>2</sup>Naopak to samozřejmě neplatí, nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem.

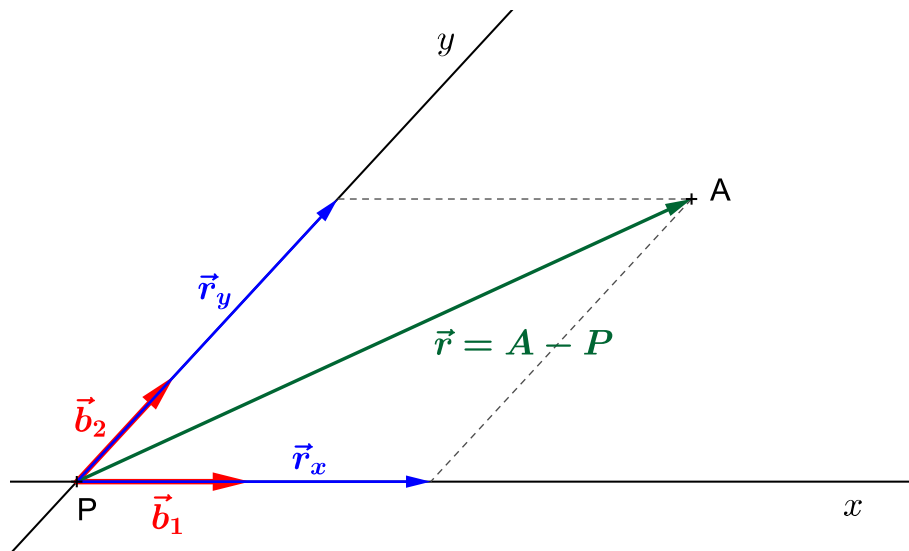
## 1.5 Afinity souřadnice bodů

**Definice 5** (Afinní soustava souřadnic - repér). *Nechť  $P$  je libovolný bod z afinního prostoru  $A_n$ ,  $n > 0$ . Nechť  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  je báze vektorového zaměření  $V_n$  prostoru  $A_n$ . Potom uspořádanou  $(n + 1)$ -tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

*nazýváme afinní soustavou souřadnic  $\varphi$  (též repérem  $\varphi$ ) v prostoru  $A_n$ .*

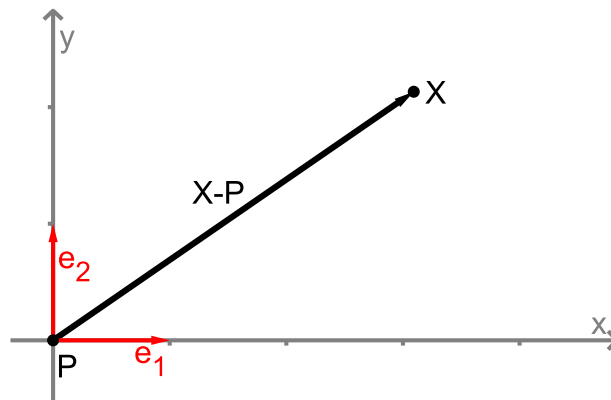
*Souřadnicemi bodu  $X \in A_n$  v soustavě souřadnic  $\varphi$  budeme rozumět souřadnice vektoru  $X - P$  v bázi  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ .*



Obrázek 1: Afinní soustava souřadnic v rovině

Jak je naznačeno na Obr. 1, dosud zavedené pojmy nám dovolují přiřadit souřadnice bodu prostřednictvím jeho průvodiče. Konkrétně se jedná o bod  $A$  s průvodičem  $\vec{r}$ . Můžeme psát  $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$ . Jistě existují taková čísla  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , pro která  $\vec{r}_x = a_1 \cdot \vec{b}_1$  a  $\vec{r}_y = a_2 \cdot \vec{b}_2$ . Potom platí  $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2$ . Vektor  $\vec{r}$  má tak vzhledem k dané bázi  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  souřadnice  $a_1, a_2$ . Bod  $A = P + \vec{r}$  je potom při pevně daném bodě  $P$  a bázi  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ , tj. při daném repéru  $\{P, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ , rovněž jednoznačně určen dvojicí čísel  $a_1, a_2$ . Říkáme, že bod  $P$  má vzhledem k danému repéru souřadnice  $[a_1, a_2]$ , píšeme  $P[a_1, a_2]$ .

**Definice 6** (Kartézská soustava souřadnic). *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic  $(P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ , kde  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  je ortonormální báze.*



Obrázek 2: Kartézská soustava souřadnic v rovině

## 1.6 Eukleidovský bodový prostor

**Definice 7** (Eukleidovský bodový prostor). *Eukleidovským bodovým prostorem  $E_n$  rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován **skalární součin**.*

**Definice 8** (Skalární součin). *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  přiřazuje reálné číslo (skalár)  $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$  tak, že platí:*

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ , (SYMETRIE)
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ , (BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)
3.  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ ,
4.  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$ . (POZITIVITA)



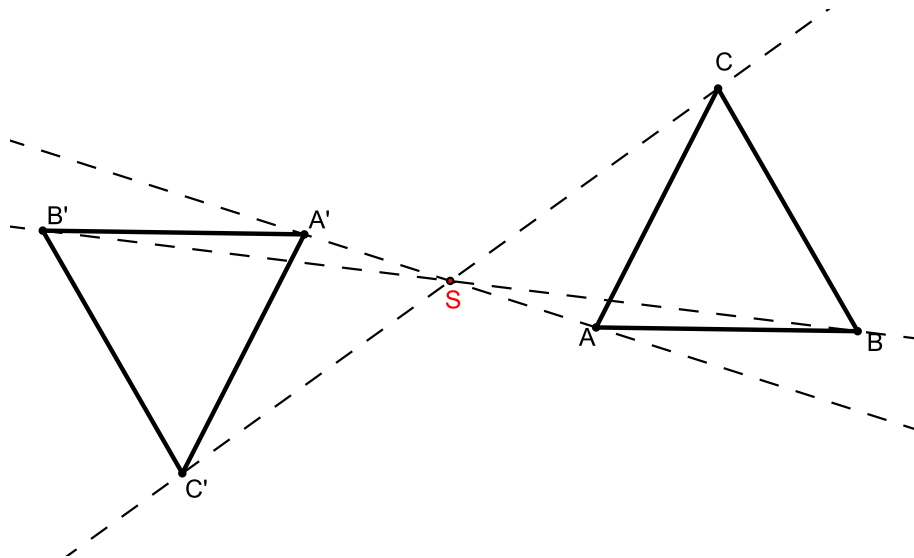
## 2 Geometrická zobrazení

**Definice 9** (Geometrické zobrazení). *Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu  $X$  (který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod  $X' = f(X)$ .*

**Definice 10** (Vzájemně jednoznačné zobrazení). *Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je prosté a zároveň je zobrazením na množinu (tj. že dvěma různými body (vzory) jsou přiřazeny dva různé obrazy a zároveň platí, že každý bod množiny, do níž zobrazujeme, je obrazem nějakého bodu z množiny vzorů).*

### Příklady geometrických zobrazení

Středová souměrnost, viz Obr. 3<sup>1</sup>

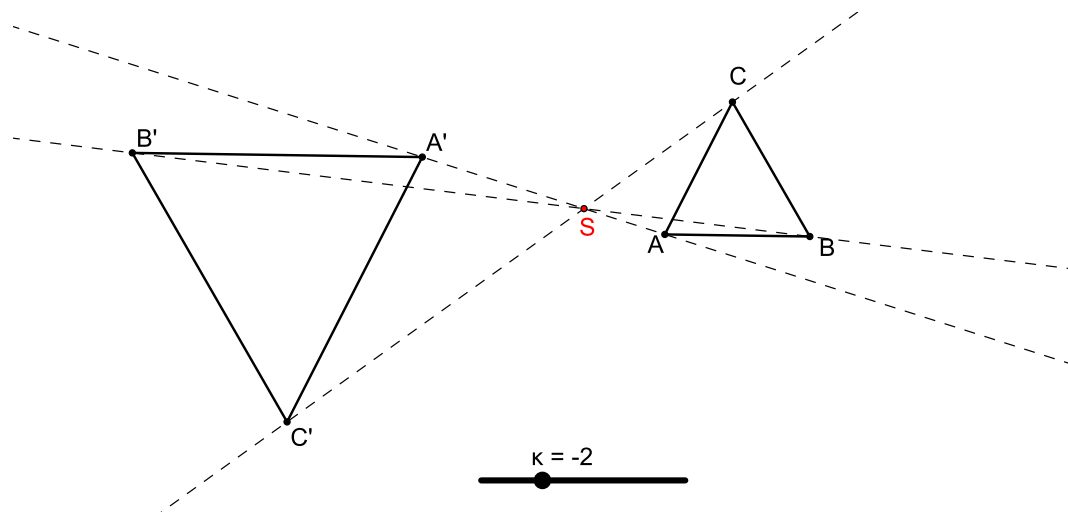


Obrázek 3: Středová souměrnost se středem  $S$

---

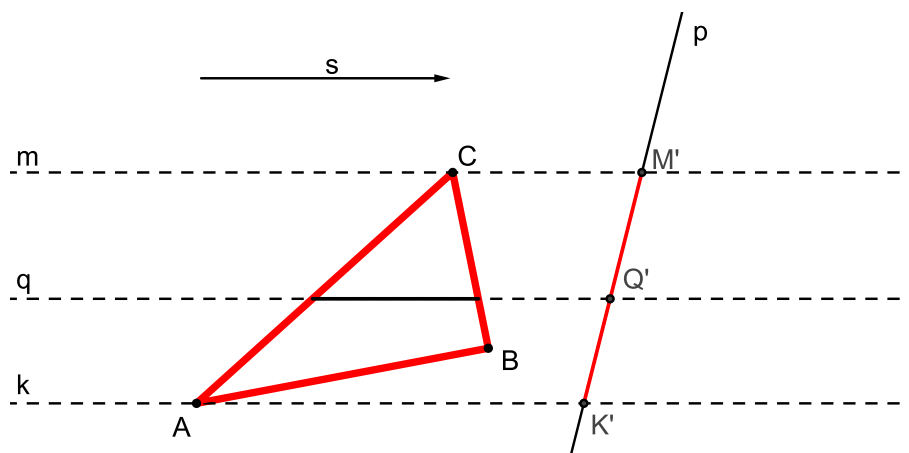
<sup>1</sup>Středová souměrnost je příkladem *vzájemně jednoznačného geometrického zobrazení* (stejně jako všechna ostatní shodná zobrazení i stejnolehlost).

**Stejnolehlost** (daná středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$ ), viz Obr. 4



Obrázek 4: Stejnolehlost se středem  $S$  a s koeficientem  $\kappa = -2$

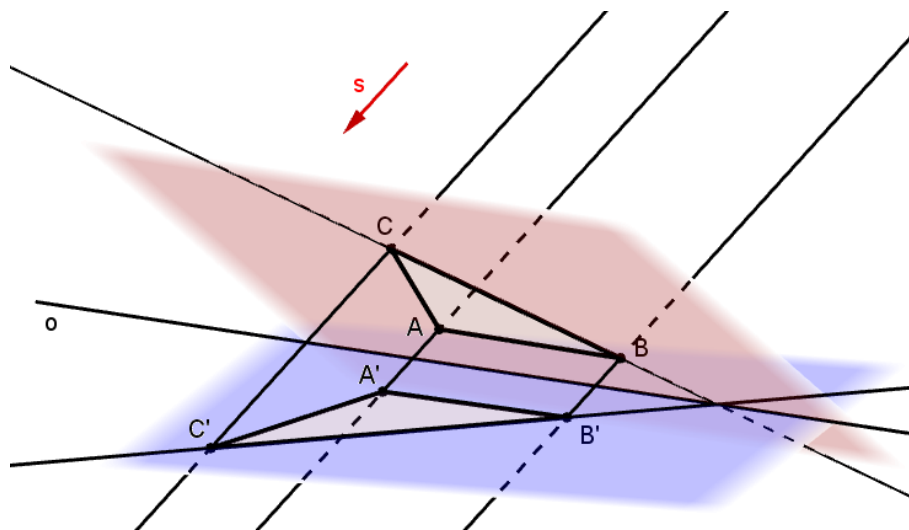
**Rovnoběžné promítání do přímky** (dané směrem  $\vec{s}$  a přímkou  $p$ ), viz Obr. 5<sup>2</sup>



Obrázek 5: Rovnoběžné promítání ve směru  $\vec{s}$  z roviny do přímky  $p$

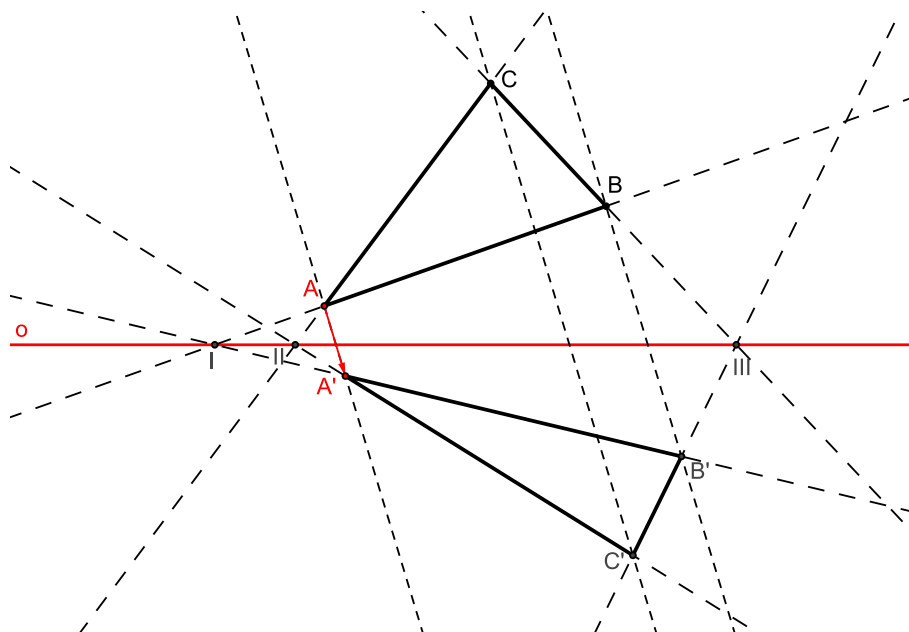
<sup>2</sup>Rovnoběžné promítání do přímky není prosté. Z obrázku je patrné, že všechny body přímky rovnoběžné se směrem  $\vec{s}$  se zobrazují do jednoho bodu. Například body přímek  $k, m, q$  se v uvedeném pořadí zobrazují do bodů  $K', M', Q'$ .

**Rovnoběžné promítání** se směrem  $\vec{s}$  mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru  $E_3$ , viz Obr. 6.



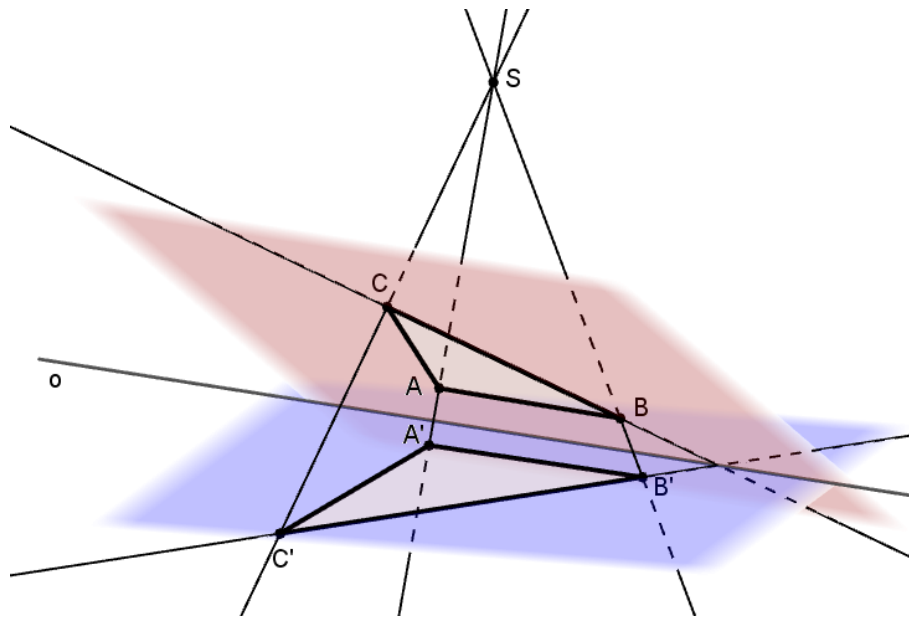
Obrázek 6: Rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *osové afinitě*)

**Osová afinita** (daná osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$  ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 7



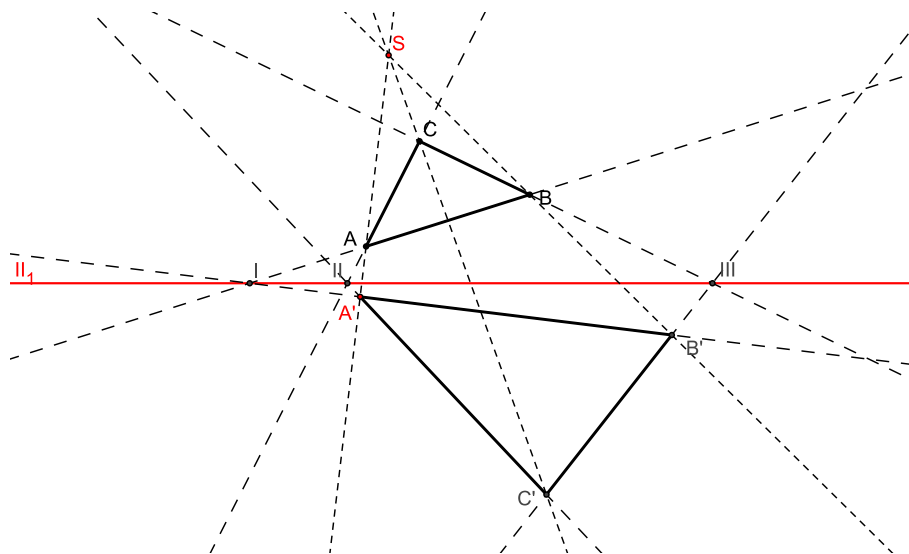
Obrázek 7: Osová afinita daná osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$

**Středové promítání** se středem  $S$  mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru  $E_3$ , viz Obr. 8.



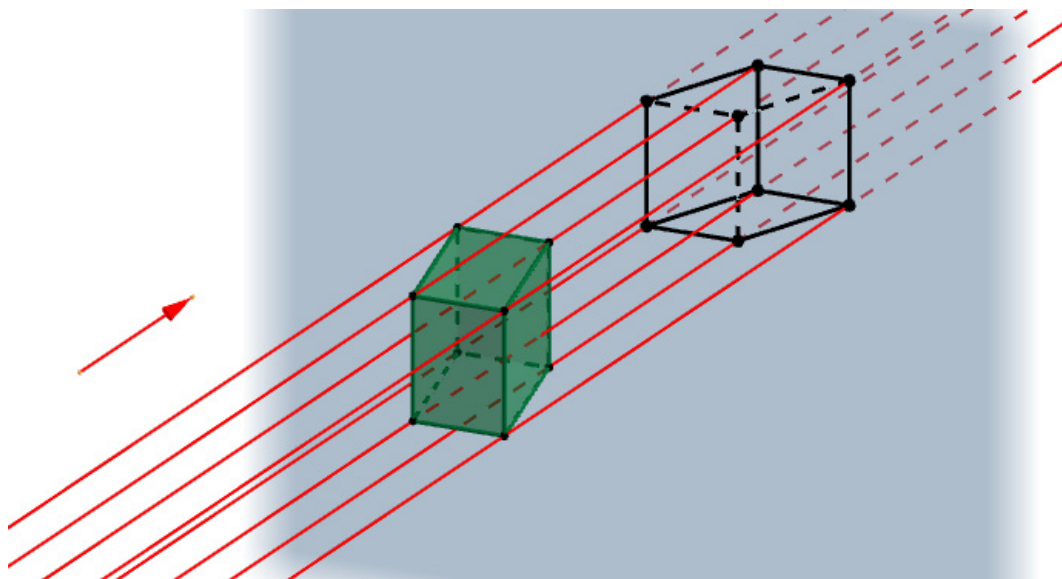
Obrázek 8: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *středové kolineaci*)

**Středová kolineace** (daná osou  $o$ , středem  $S$  a dvojicí bodů  $A, A'$  ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 9



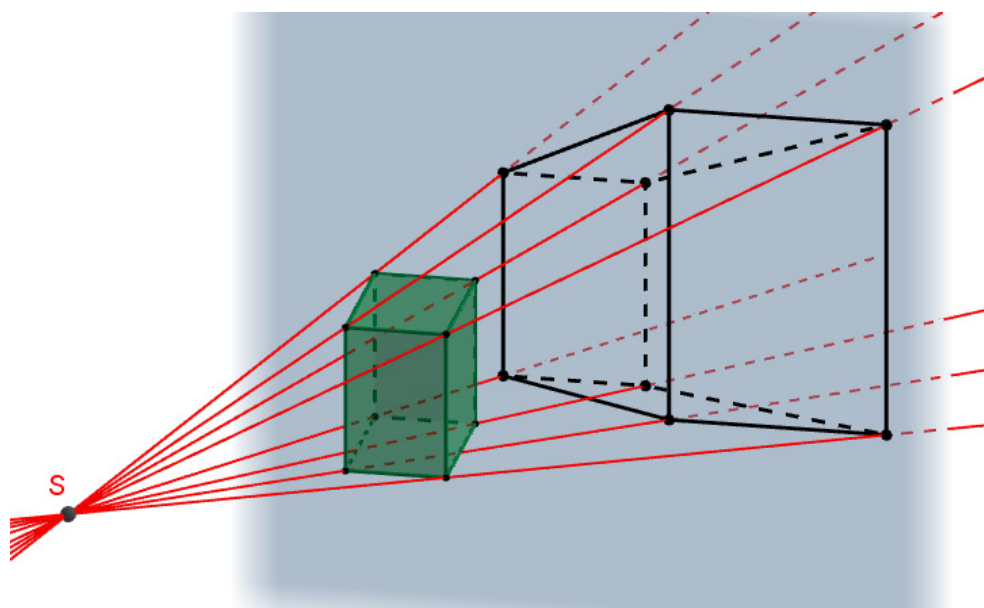
Obrázek 9: Středová kolineace daná středem  $S$ , osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$

**Rovnoběžné promítání** (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané směrem  $\vec{s}$ ), viz Obr. 10.



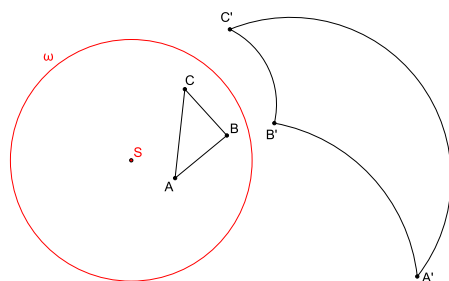
Obrázek 10: Rovnoběžné promítání trojrozměrného útvaru do roviny

**Středové promítání** (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané středem  $S$ ), viz Obr. 11



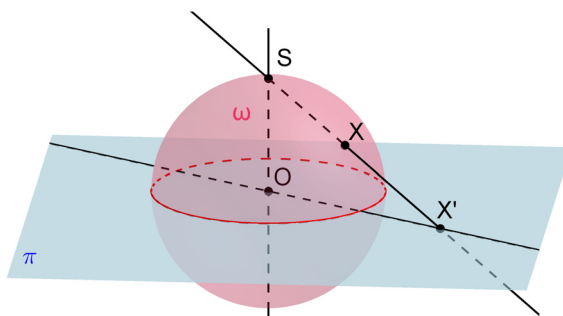
Obrázek 11: Středové promítání trojrozměrného útvaru do roviny

**Kruhová inverze** (daná určující kružnicí  $\omega = (S, r)$  a vztahem  $|SX| \cdot |SX'| = r^2$  mezi vzorem  $X$  a obrazem  $X'$ ), viz Obr. 12

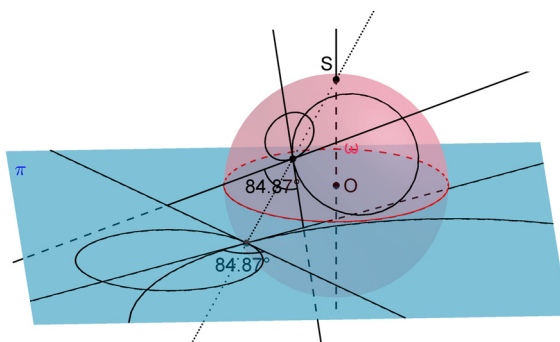


Obrázek 12: Kruhová inverze daná kružnicí  $\omega$

**Stereografická projekce**<sup>3</sup>, viz Obr. 13



Obrázek 13: Stereografická projekce



Obrázek 14: Stereografická projekce: obrazem kružnice je kružnice, velikost úhlu se zachovává (tzv. *konformní* zobrazení).

**PŘÍKLAD 2.1.** Pomocí programu GeoGebra vyzkoumejte, zda se v následujících zobrazeních zobrazí střed úsečky zase na střed úsečky: stejnolehlost, osová afinita, středová kolineace, kruhová inverze.

<sup>3</sup>Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání  $S$  ležící na kulové ploše  $\omega$  a pro průmětnu  $\pi$  rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání  $S$

### 3 Afinní zobrazení

Afinní zobrazení v rovině je příkladem transformace roviny na sebe. Každému bodu  $X$  roviny  $E_2$  přiřadí bod  $X' = f(X)$  téže roviny při zachování určitých vlastností. Důležitým pojmem při zavedení afinního zobrazení je dělicí poměr. Jedná se o tzv. *invariant* afinního zobrazení.

#### 3.1 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.



Obrázek 15: Tři kolineární body

**Definice 11** (Dělicí poměr). *Nechť  $A, B, C$ ;  $A \neq B$ ,  $C \neq B$ , jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$  rozumíme reálné číslo  $\lambda$ , které zapisujeme  $(ABC)$ , a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (1)$$

*přítom pro bod  $C$  ležící vně úsečky  $AB$  je  $(ABC) > 0$  a pro bod  $C$  ležící uvnitř  $AB$  je  $(ABC) < 0$ . Pro  $C = A$  je zřejmě  $(ABC) = 0$ .*

**Poznámka.** Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu  $C$  od daných bodů  $A, B$ . Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.16.



Obrázek 16: Dělicí poměr bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$

**Definice 12** (Dělicí poměr 2). *Nechť  $A, B, C$ ;  $A \neq B$ ,  $C \neq B$ , jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo  $\lambda$  definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \quad (2)$$

*značíme  $(ABC)$  a nazýváme dělicím poměrem bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$ .*

**Poznámka.** Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle  $\lambda$ , tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů  $A = [a_1; a_2]$ ,  $B = [b_1; b_2]$ ,  $C = [c_1; c_2]$  :

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

**PŘÍKLAD 3.1.** Určete dělicí poměr  $(ABS)$  středu  $S$  úsečky  $AB$  vzhledem k jejím krajním bodům  $A, B$ .

**PŘÍKLAD 3.2.** Pro body  $A, B, C$  platí  $(ABC) = \lambda$ . Zapište pomocí  $\lambda$  dělicí poměry  $(BAC)$ ,  $(CBA)$ ,  $(ACB)$ ,  $(CAB)$  a  $(BCA)$ .

*Řešení:* Vztah (2) pro  $(ABC) = \lambda$  přepíšeme do tvaru  $A = \lambda B + (1 - \lambda)C$ . Odtud po vydělení  $\lambda$  dostaneme  $B = \frac{1}{\lambda}A + (1 - \frac{1}{\lambda})C$ . Odtud je zřejmé, že  $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$ . Poznamenejme ještě, že ke stejnému výsledku vede také toto odvození:  $(BAC) = \frac{C - B}{C - A} = \frac{1}{\frac{C - A}{C - B}} = \frac{1}{\lambda}$ .

Analogicky odvodíme vyjádření dalších dělicích poměrů v rámci dané trojice bodů:  $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ ,  $(ACB) = 1 - \lambda$ ,  $(CAB) = \frac{1}{1 - \lambda}$  a  $(BCA) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ .

**PŘÍKLAD 3.3.** V rovině jsou dány dva pevné body  $A, B$ . Určete množinu všech bodů  $X$  této roviny, pro které platí

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde  $k$  je reálná konstanta.

*Řešení:* Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako „Apolloniova kružnice“, viz Obr. 17. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů  $A, B$  vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu  $x$  tak, že  $A = [-a, 0]$  a  $B = [a, 0]$ , kde  $a \in R$ . Vztah  $\frac{|AX|}{|BX|} = k$  přepíšeme do tvaru

$$|AX| = k|BX|$$

a dosadíme uvedené souřadnice bodů  $A, B, X$ . Dostaneme

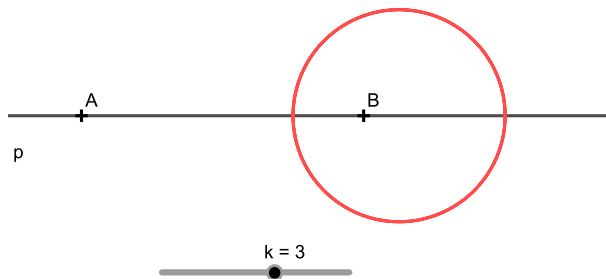
$$\sqrt{(x + a)^2 + y^2} = k\sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$



Po umocnění obou stran rovnosti na druhou a po několika úpravách, mimo jiné také použijeme doplnění na čtverec, dostáváme rovnici vyšetřované množiny bodů  $X = [x, y]$  ve tvaru

$$\left(x - \frac{a(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2 k^2}{(k^2 - 1)^2},$$

který odpovídá rovnici  $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$  kružnice se středem  $S = [s_1, s_2]$  a poloměrem  $r$ .



Obrázek 17: Apolloniova kružnice jako množina bodů  $X$ , pro které platí  $\frac{|AX|}{|BX|} = 3$

### 3.2 Afinity zobrazení

**Definice 13** (Afinity zobrazení). Zobrazení  $f$  afinního prostoru  $A$  do afinního prostoru  $A'$  se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body  $B, C, D$  z prostoru  $A$  na přímce, pak jejich obrazy  $f(B), f(C), f(D)$  buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj.:

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

**PŘÍKLAD 3.4.** Pomocí konkrétního příkladu afinního zobrazení (např. rovnoběžného promítání krychle do roviny) ilustруйте obě situace týkající se obrazů  $f(B), f(C), f(D)$ , které definice zmiňuje.

## 4 Afinní transformace roviny (Afinita)

Budeme uvažovat speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory  $A$  a  $A'$  splynou. Půjde nám tak o vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru  $A$  (v našem případě  $E_2$ ) na sebe.

**Definice 14.** *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru  $E_2$  na sebe nazýváme **afinitou prostoru  $E_2$**  nebo **afinní transformací prostoru  $E_2$** .*

**Poznámka.** *Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je zároveň prosté a na množinu.*

**Věta 1.** *Všechny afinity prostoru  $E_2$  tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv. **afinní grupu prostoru  $E_2$** .*

*Důkaz.* Složením dvou afinit prostoru  $E_2$  vznikne opět afinita prostoru  $E_2$ . K afinitě  $f$  existuje inverzní afinita  $f^{-1}$  (afinita je vzájemně jednoznačné zobrazení). Neutrálním prvkem je zřejmě identita.  $\square$

### 4.1 Analytické vyjádření afinity v rovině

Každé afinní zobrazení  $f$  v rovině  $E_2$ , které bodu  $X = [x, y]$  přiřazuje obraz  $X' = [x', y']$ , je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (3)$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (3), je afinitou v rovině. Soustavu (3) můžeme zapsat také pomocí matic

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Potom řekneme, že afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

$$\text{kde } X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ a } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

**PŘÍKLAD 4.1.** Maticovou rovnicí ve tvaru (4) zapište tyto afinity: (i) osová souměrnost podle osy  $y$ , (ii) středová souměrnost podle počátku, (iii) Středová souměrnost se středem v bodě  $[0, 5]$ . Využijte: [tube.geogebra.org/student/mUcqve9uT](http://tube.geogebra.org/student/mUcqve9uT)

**Věta 2** (O určenosti afinity v rovině). *Nechť  $K, L, M$  a  $K', L', M'$  jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita  $f$  této roviny, která body  $K, L, M$  zobrazuje v daném pořadí na body  $K', L', M'$ .*

*Důkaz.* Využijeme (3). Afinita  $f$  musí být dána takovýmito rovnicemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ , která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů „vzor  $\rightarrow$  obraz“ dostaneme následující rovnice:

$K[k_1, k_2] \rightarrow K'[k'_1, k'_2]$ :

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k'_1, \quad (5)$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k'_2. \quad (6)$$

$L[l_1, l_2] \rightarrow L'[l'_1, l'_2]$ :

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l'_1, \quad (7)$$

$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l'_2. \quad (8)$$

$M[m_1, m_2] \rightarrow M'[m'_1, m'_2]$ :

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m'_1, \quad (9)$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m'_2. \quad (10)$$

Pro známé souřadnice bodů  $K, L, M, K', L', M'$  tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ . Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty 2. Po detailním prozkoumání rovnic (5)–(10) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (5), (7) a (9) o neznámých  $a_{11}, a_{12}, b_1$  a soustavu rovnic (6), (8) a (10) o neznámých  $a_{21}, a_{22}, b_2$ . Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_1 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_1 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_1 \end{array} \right], \quad (11)$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_2 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_2 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_2 \end{array} \right]. \quad (12)$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (13)$$

Determinant v (13) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích (2, 3) a (3, 3) postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (14)$$

která je splněna právě tehdy, když jsou vektory  $L - K$  a  $M - K$  nezávislé, tj. body  $K, L, M$  neleží v přímce.

Teď zbývá dokázat, že když body  $K, L, M$  neleží v přímce, ani body  $K', L', M'$  nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici afinity  $X' = A \cdot X + B$ . Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \quad (15)$$

$$L' = A \cdot L + B, \quad (16)$$

$$M' = A \cdot M + B. \quad (17)$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že  $K, L, M$  neleží v přímce a zároveň body  $K', L', M'$  leží v přímce. Potom existuje  $j \in R$  takové, že  $L' - K' = j(M' - K')$ . Po dosazení z (15)–(17) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k  $A$  dostaneme  $L - K = j(M - K)$ , což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů  $K, L, M$ . Body  $K', L', M'$  tedy také nemohou ležet v přímce.

□

## 4.2 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (4) mají  $b_1 = b_2 = 0$ .

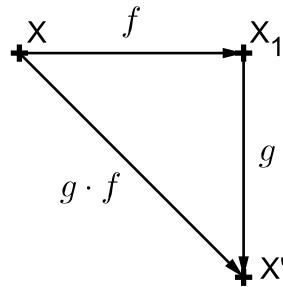
**PŘÍKLAD 4.2.** Jsou dána lineární zobrazení  $f, g$ :

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici  $M$  složeného zobrazení

$$g \cdot f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

*Řešení:* Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 18. Bod  $X[x, y]$  je afinitou  $f$  zobrazen



Obrázek 18: Skládání afinit  $f$  a  $g$  v rovině

na bod  $X_1[x_1, y_1]$ , ten je pak afinitou  $g$  zobrazen na bod  $X'[x', y']$ . Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 18 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{matrix} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{matrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{matrix} x' = Ax_1 + By_1 \\ y' = Cx_1 + Dy_1 \end{matrix}.$$

Potom po dosazení za  $x_1$  a  $y_1$  z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{matrix} x' = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y' = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{matrix},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Z porovnání (18) a (19) je zřejmé, že pro matici  $M$  složené afinity  $g \cdot f$  platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Rovnost (20) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

## 5 Shodná zobrazení v rovině

**Definice 15.** Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům  $X, Y$  přiřazuje body  $X', Y'$  tak, že

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** v rovině (též *izometrické zobrazení*).

**Poznámka.** Můžeme též říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů, tj. pro shodné zobrazení  $f : X \rightarrow f(X)$  platí:

$$|f(X)f(Y)| = |XY|.$$

**Věta 3.** Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.

### Další vlastnosti shodných zobrazení:

1. Úsečka se zobrazí na úsečku.
2. Polopřímka se zobrazí na polopřímku.
3. Přímka se zobrazí na přímku.
4. Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
5. Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
6. Polorovina se zobrazí na polorovinu.

**PŘÍKLAD 5.1.** V euklidovské rovině  $E_2$  je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel  $a, b$  existuje shodné zobrazení roviny  $E_2$  do sebe, zobrazující body  $[0, 0], [2, 1], [4, a]$  po řadě na body  $[1, 2], [3, 1], [5, b]$ ? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?

**Věta 4** (O určenosti shodného zobrazení v rovině). Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body  $A, B, C$  a třemi nekolineárními body  $A', B', C'$ , které jsou po řadě jejich obrazy.

*Důkaz:* Naznačte pomocí obrázku.

(Inspirujte se při tom apletem [tube.geogebra.org/student/mcvhiLQtx](http://tube.geogebra.org/student/mcvhiLQtx))

**Poznámka.** Již víme, že analogická věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta 2 o určenosti afinního zobrazení v rovině).

## 5.1 Rovnice shodnosti v rovině

Každou afinitu  $f$  v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \quad (21)$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (23)$$

### Jak poznáme, že afinita (21) je shodností?

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů  $X[x_1, x_2]$ ,  $Y[y_1, y_2]$  a jejich obrazy  $X'[x'_1, x'_2]$ ,  $Y'[y'_1, y'_2]$  vztah  $|X'Y'| = |XY|$ , z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \quad (24)$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (25)$$

Nyní do levé strany (25) dosadíme z (21), upravíme na tvar obsahující výrazy  $(y_1 - x_1)$  a  $(y_2 - x_2)$  a diskutujeme, za jakých podmínek je splněna její rovnost s pravou stranou. Zjistíme, že rovnost  $|X'Y'| = |XY|$  nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice  $A$  (tj. koeficienty soustavy (21)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$



Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice (21) je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \quad (28)$$

kde  $E$  je jednotková matice, jinak řečeno, když je matice  $A$  **ortonormální**.

### Poznámky.

1. Platí  $A^T \cdot A = E$ . Potom je ale  $A^T = A^{-1}$  a platí tedy i rovnost  $A \cdot A^T = E$ .
2. Zobrazení, pro která platí  $|\det A| = 1$  nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinita**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?
3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice  $A$  čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka  $A^T \cdot A = E$ .

### Samodružné body

Samodružným bodem (afinního) zobrazení rozumíme bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. pro jeho souřadnice platí  $X' = X$ . Pokud do rovnic (21) dosadíme  $x' = x$  a  $y' = y$  je zřejmé, že souřadnice samodružných bodů dané shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 &= b_2. \end{aligned} \quad (29)$$

### Samodružné směry

Samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe. Pro vyjádření směru používáme vektor, např.  $\vec{u}$  (příslušný „směr“ potom reprezentují všechny jeho násobky). Má-li být tento směr samodružný, musí pro vektor  $\vec{u}'$ , který je obrazem vektoru  $\vec{u}$ , platit  $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ , kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Zobrazení mezi vektory zaměření afinního bodového prostoru (obecně však toto zobrazení probíhá mezi různými zaměřeními různých bodových prostorů) zajišťuje tzv. **asociovaný homomorfismus** (též **lineární zobrazení**).

**Definice 16** (Homomorfismus). *Zobrazení  $\varphi$  vektorového prostoru  $V$  do vektorového prostoru  $V'$  se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ ,  $k \in \mathbb{T}$  (místo obecného tělesa  $\mathbb{T}$  můžeme uvažovat  $\mathbb{R}$ ) platí:*

- (1)  $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$ ,
- (2)  $\varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u})$ .

**Definice 17** (Asociovaný homomorfismus zobrazení  $f$  v rovině). Uvažujme afinní transformaci  $f$  prostoru  $E_2$ . Potom **asociovaným** (tj. jednoznačně přiřazeným) **homomorfismem** afinity  $f$  rozumíme lineární zobrazení  $\varphi$ , které zobrazuje zaměření  $V_2$  prostoru  $E_2$  do sebe takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (30)$$

kde  $X, Y$  a  $f(X), f(Y)$  jsou body z  $E_2$ ,  $\vec{u}, \varphi(\vec{u}) \in V_2$ .

Asociovaný homomorfismus  $\varphi$  afinity  $f$  je potom dán soustavou

$$\begin{aligned} \varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{aligned}$$

maticově pak

$$\varphi : \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

což lze zapsat, analogicky s rovnicí (22), ve tvaru

$$\varphi : \vec{u}' = A \cdot \vec{u}. \quad (31)$$

Samodružné směry shodnosti (tj. vektory těchto směrů, pro které platí  $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ ) jsou potom **netriviálním** řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 &= 0 \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Homogenní soustava  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant soustavy roven nule. Soustavy (32) má tedy nekonečně mnoho řešení, jestliže platí rovnost

$$\begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) \end{vmatrix} = 0. \quad (33)$$

Rovnici (33) říkáme **charakteristická rovnice** příslušného zobrazení, v tomto případě shodnosti v rovině. Každý vektor  $\vec{u}$ , pro který platí  $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ , nazýváme **vlastním vektorem** homomorfismu  $\varphi$ , číslo  $\lambda$ , které je řešením charakteristické rovnice, pak nazýváme **vlastní číslo** homomorfismu  $\varphi$ , odpovídající vektoru  $\vec{u}$ . Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny **charakteristický vektor** a **charakteristické číslo**.

Uvedené postupy určení samodružných bodů a směrů shodného zobrazení si nyní budeme ilustrovat na nám dobře známých shodnostech, na středové a osově souměrnosti.

**Středová souměrnost se středem v bodě**  $S = [2, -3]$  je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4, \\y' &= -y - 6.\end{aligned}$$

Představme si, že nevíme, o jaké afinní zobrazení se jedná a teprve to chceme zjistit.

Matice tohoto zobrazení je  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , součin  $A^T \cdot A$  je roven  $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , jedná se tedy o shodnost.

Nyní určíme samodružné body daného zobrazení řešením soustavy

$$\begin{aligned}2x &= 4, \\2y &= -6.\end{aligned}$$

Ta má jediné řešení  $[x, y] = [2, -3]$ . Jedná se tedy o shodné zobrazení s jediným samodružným bodem  $S = [2, -3]$ . V úvahu tak připadá otočení nebo středová souměrnost.

K rozhodnutí, která z těchto dvou možností je správná, nám pomůže určení samodružných směrů daného zobrazení. Řešíme proto homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda + 1)u_1 &= 0, \\(\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Jejím jediným řešením je vlastní číslo  $\lambda = -1$ , které dosadíme do příslušné homogenní soustavy, abychom dostali soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0u_1 &= 0, \\0u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor  $\vec{v} = (u_1, u_2) \in R \times R$ . Vyšetřovaná shodnost má tedy všechny směry samodružné. Jedná se proto o středovou souměrnost se středem  $S = [2, -3]$ .

**Osová souměrnost s osou v souřadnicové ose  $x$**  je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= -y.\end{aligned}$$

Opět předstíráme, že nevíme, o jaké afinní zobrazení se jedná a teprve to chceme zjistit.

Matice tohoto zobrazení je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , součin  $A^T \cdot A$  je roven  $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , jedná se tedy o shodnost.

Nyní určíme samodružné body daného zobrazení řešením soustavy

$$\begin{aligned}0x &= 0, \\2y &= 0.\end{aligned}$$

Ta má nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi všechny uspořádané dvojice ve tvaru  $[x, 0]$ ;  $x \in R$ . Jedná se tedy o shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body leží v přímce o rovnici  $y = 0$ . V úvahu tak připadá jediná možnost, osová souměrnost s osou v souřadnicové ose  $x$ .

Přestože jsme dané zobrazení již identifikovali, dokončíme analýzu jeho vlastností určením samodružných směrů. Řešíme proto homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)u_1 &= 0, \\(\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Charakteristická rovnice má dva kořeny (vlastní čísla)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ , které postupně dosadíme do příslušné homogenní soustavy a vypočítáme souřadnice příslušných vlastních vektorů daného zobrazení.

Pro  $\lambda_1 = 1$  dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}0u_1 &= 0, \\2u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor  $\vec{v}_1 = (u_1, 0) \in R^2$ . Samodružný směr určený těmito vektory je rovnoběžný s osou  $x$  (tj. s osou souměrnosti).

Pro  $\lambda_2 = -1$  dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}-2u_1 &= 0, \\0u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor  $\vec{v}_2 = (0, u_2) \in R^2$ . Samodružný směr určený těmito vektory je kolmý k ose  $x$  (tj. k ose souměrnosti). Určení dvou na sebe kolmých samodružných směrů je v souladu se skutečností, že uvažované shodné zobrazení je osová souměrnost.

**PŘÍKLAD 5.2.** Zjistěte, zda existuje shodnost  $E_2$ , při které se bod  $K = [10; 0]$  zobrazí na počátek  $K' = [0; 0]$  a bod  $L = [25; 20]$  na bod  $L' = [0; 25]$ . V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body a směry.

*Řešení:* Začneme tím, že si ověříme, zda zadané body splňují definici shodného zobrazení, tj. zda  $|K'L'| = |KL|$ . V případě této úlohy zvládneme ověření provést zpaměti. Výsledkem je, že zadání vyhovuje definici shodnosti.

Další postup řešení úlohy si ilustrujeme pomocí zápisu v programu wxMaxima (viz <http://andrevj.github.io/wxmaxima/>)

```
(%i1) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); B:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o1) (a11 a12)
      (a21 a22)
```

```
(%o2) (b1)
      (b2)
```

Rovnici  $X' = A \cdot X + B$  vyjádříme ve tvaru  $A \cdot X + B - X' = O$  a dosadíme souřadnice daných dvojic bodů  $K, K'$  a  $L, L'$ . Potom zapíšeme podmínku (28) pro to, aby bylo afinní zobrazení shodností ve tvaru  $A^T \cdot A - E = O$ . (V programu wxMaxima zapíšeme jenom levé strany uvedených rovnic.)

```
(%i3) s1:A.[10,0]+B-[0,0]; s2:A.[25,20]+B-[0,25];
s3:transpose(A).A-ident(2);
```

```
(%o3) (b1 + 10 a11)
      (b2 + 10 a21)
```

```
(%o4) ( b1 + 20 a12 + 25 a11 )
      (b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25)
```

```
(%o5) ( a21^2 + a11^2 - 1  a21 a22 + a11 a12 )
      (a21 a22 + a11 a12  a22^2 + a12^2 - 1 )
```

Všechny prvky výše uvedených matic musí být rovny nule (Proč?). Dostaneme tak soustavu sedmi rovnic pro šest neznámých  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ .

```
(%i6) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

```
(%o6) [b1 + 10 a11, b2 + 10 a21, b1 + 20 a12 + 25 a11, b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25, a21^2 +
a11^2 - 1, a21 a22 + a11 a12, a22^2 + a12^2 - 1]
```

Tato soustava má následující dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení):

```
(%i7) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

```
(%o7) [[a11 = 4/5, a12 = -3/5, a21 = 3/5, a22 = 4/5, b1 = -8, b2 = -6],
[a11 = -4/5, a12 = 3/5, a21 = 3/5, a22 = 4/5, b1 = 8, b2 = -6]]
```

Dvěma řešeními odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body  $K, L$  na body  $K', L'$  (Což se, vzhledem ke *věťě o určenosti shodného (afinního) zobrazení* dalo čekat. Proč?). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Pro zápis rovnic uvažovaných shodností si nejprve připravíme matici **RovTr**, jejímiž řádky jsou rovnice afinity v obecném tvaru (tato matice není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i8) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

```
(%o8) (x1 = a12 y + a11 x + b1)
      (y1 = a22 y + a21 x + b2)
```

## Řešení č. 1:

```
(%i9) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(B,res[1]);
```

```
(%o9)  $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o10)  $\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ 
```

Příslušná shodnost má rovnice

```
(%i11) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

```
(%o11)  $\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3y}{5} + \frac{4x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$ 
```

Samodružný bod je bod, pro který platí  $X' = X$ . Pro výpočet souřadnic samodružných bodů daného zobrazení tak do rovnice  $X' = A \cdot X + B$  (pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru  $A \cdot X + B - X = 0$ ) za  $X'$  dosadíme  $X$  a řešíme odpovídající soustavu dvou rovnic s neznámými  $x, y$ .

```
(%i12) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

```
(%o12)  $\begin{pmatrix} -\frac{3y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o13) [[x = 5, y = -15]]
```

Protože tato soustava má jediné řešení, má daná shodnost jediný samodružný bod  $S = [5, -15]$ .

Pro vyšetření samodružných směrů daného zobrazení řešíme charakteristickou rovnicí (33)

```
(%i14) CharM1:A1-%lambda*ident(2);  
CharR1:expand(determinant(CharM1))=0;  
solve(CharR1,%lambda);
```

```
(%o14)  $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o15)  $\lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$ 
```

$$(\%o16) \left[ \lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5} \right]$$

Charakteristická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel. Daná shodnost tak nemá žádný samodružný směr.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o **otočení** se středem  $S = [5, -15]$ .

**Poznámka.** K úplné identifikaci daného zobrazení nám zbývá určit úhel otočení  $\alpha$ . Jak to uděláme?

### Řešení č. 2:

Postupujeme analogicky s řešením č. 1.

```
(%i17) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(B,res[2]);
```

$$(\%o17) \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o18) \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Rovnice zobrazení

```
(%i19) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

$$(\%o19) \begin{pmatrix} x1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body:

```
(%i20) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

$$(\%o20) \begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{9x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

$$(\%o21) []$$

Toto zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Samodružné směry:



```
(%i22) CharM2:A2-%lambda*ident(2);
CharR2:expand(determinant(CharM2))=0;
solve(CharR2,%lambda);
```

$$(\%o22) \begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o23) \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\%o24) [\lambda = -1, \lambda = 1]$$

```
(%i25) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

$$(\%o25) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

```
(%i26) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o26) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%o27) [[u = -3 \%r1, v = \%r1]]$$

```
(%i28) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o28) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%o29) [[u = \frac{\%r2}{3}, v = \%r2]]$$

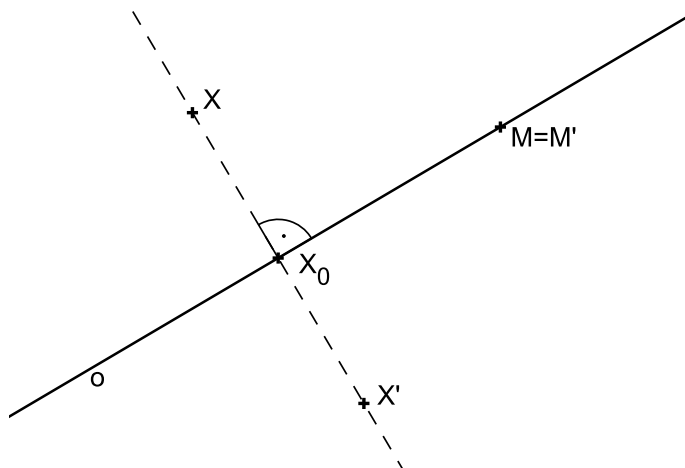
Zobrazení má dva na sebe kolmé samodružné směry  $\vec{u} = (-3, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 3)$ .

Jedná se o **posunuté zrcadlení**.

**Poznámka.** K úplné identifikaci výsledného zobrazení nám zbývá určit osu  $o$  a vektor posunutí  $\vec{t}$ . Jak to uděláme?

## 5.2 Osová souměrnost

**Definice 18.** *Nechť je dána přímka  $o$ , kterou nazýváme **osa souměrnosti**. Potom pro obraz  $M'$  libovolného bodu  $M$  této přímky  $o$  platí  $M' \equiv M$ . Ke každému bodu  $X$ , který neleží na přímce  $o$ , sestrojíme obraz  $X'$  následujícím způsobem: Bodem  $X$  vedeme kolmici  $k$  na přímku  $o$  a její patu označíme  $X_0$ . Na polopřímce opačné k polopřímce  $X_0X$  sestrojíme bod  $X'$  tak, že  $|X'X_0| = |XX_0|$ . Takto definované zobrazení nazýváme **osová souměrnost s osou  $o$**  a značíme ho  $\mathcal{O}(o)$ .*

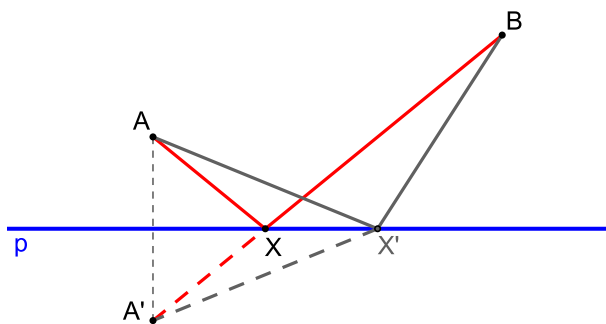


Obrázek 19: Definice osové souměrnosti

### Poznámky:

1. O bodech  $X, X'$  říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy  $o$ .
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

**PŘÍKLAD 5.3.** *Je dána přímka  $p$  a body  $A, B$  v téže polorovině s hraniční přímkou  $p$ . Najděte všechny body  $X \in p$  takové, že součet vzdáleností  $|AX| + |BX|$  je minimální.*



Obrázek 20: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 20

**Věta 5.** *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

### Samodružné body a směry osově souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Později tuto skutečnost využijeme ke klasifikaci shodností.

**Věta 6** (Alternativní definice osově souměrnosti). *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku  $o$ , je souměrnost podle osy  $o$ .*

**Věta 7.** *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

**Věta 8.** *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

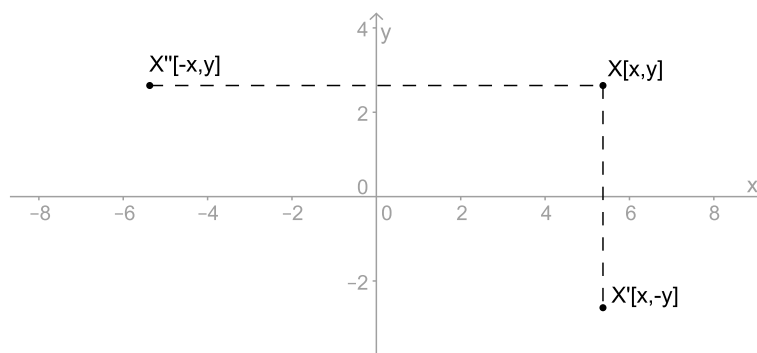
**Věta 9.** *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

**Věta 10.** *Samodružné přímky osově souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

#### 5.2.1 Analytické vyjádření osově souměrnosti $O(o)$ v rovině

**PŘÍKLAD 5.4.** *Napište analytické vyjádření osově souměrnosti s osou v souřadnicové ose  $x$  ( $y$ ).*

*Řešení:* Dle obrázku 21 je zřejmé, že uvedené osově souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.



Obrázek 21: Odvození rovnic osově souměrnosti s osou v souřadnicové ose  $x$  ( $y$ )

*Osová souměrnost s osou  $x$ :*

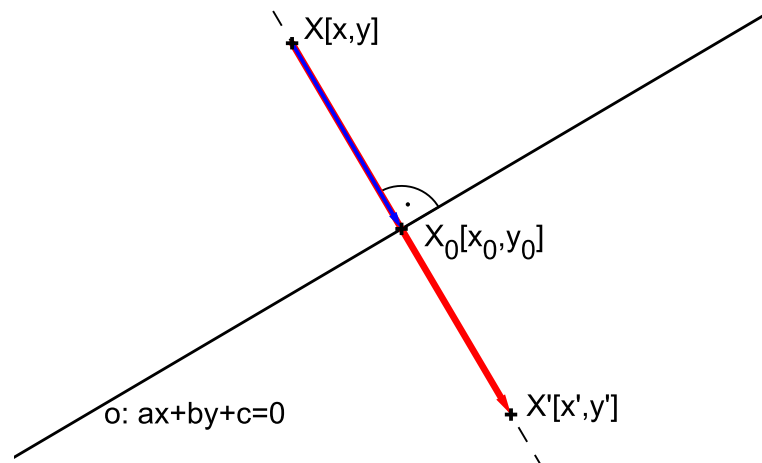
$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= -y\end{aligned}$$

*Osová souměrnost s osou  $y$ :*

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= y\end{aligned}$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

**Osová souměrnost podle osy  $o$  dané rovnicí  $o : ax + by + c = 0$**



Obrázek 22: Odvození rovnic osové souměrnosti  $O(o)$

Dle obrázku 22 platí

$$\begin{aligned} X' - X &= 2(X_0 - X), \\ X_0 - X &= k(a, b). \end{aligned}$$

Z druhé rovnosti vyjádříme  $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$  a dosadíme je do obecné rovnice osy  $o: a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$ . Odsud potom vyjádříme parametr  $k = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$ , který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti  $O(o)$ :

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \\ y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 5.5.** V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky  $p : 3x - 4y + 1 = 0$ . Napište rovnice této souměrnosti.

## 5.2.2 Osová souměrnost - Úlohy

### 1. Dokažte Vivianiho větu.

**Věta 11** (Vivianiho věta). *V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.*

### 2. Řešte Fagnanův problém:

„Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.“

### 3. Provedte následující tzv. Mascheroniovu konstrukci<sup>1</sup>:

„Je dána kružnice  $k(S; r)$ ; dále je dána dvěma body  $A, B$  (body neleží na kružnici) její sečna  $p$ , která neprochází středem  $S$ . Sestrojte průsečíky přímky  $p$  s kružnicí  $k$ , aniž přitom použijete pravítka.“

### 4. Dokažte následující vlastnost průsečíku výšek (ortocentra) trojúhelníku:

„Body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.“

### 5. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$ .

### 6. Sestrojte trojúhelník $ABC$ , je-li dán obvod $o = 12\text{cm}$ a úhly $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ$ .

### 7. Jsou dány dvě různoběžky $p, q$ a bod $A$ mimo ně. Najděte body $B \in p, C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku $ABC$ byl minimální.

### 8. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu $A$ .

### 9. Sestrojte čtverec $ABCD$ , je-li dáno $a + e = 10\text{cm}$ .

### 10. Sestrojte obdélník $ABCD$ , je-li dáno $e = 7\text{cm}, a - b = 1\text{cm}$ .

### 11. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ( $AB \parallel CD$ ), je-li dáno $b = 3\text{cm}, c = 2.5\text{cm}, d = 2.6\text{cm}, \alpha - \beta = 20^\circ$ .

---

<sup>1</sup>Lorenzo Mascheroni (italský matematik, 1750–1800) dokázal ve své knize *Geometria del Compasso* (1797), že každá konstrukce realizovatelná užitím kružítko a pravítka bez měřítka se dá provést pouze pomocí kružítko. Proto se takovým konstrukcím říká Mascheroniový konstrukce. Nutno však uvést, že důkaz téhož tvrzení publikoval více než sto let před Mascheronim dánský matematik Georg Mohr.

### 5.2.3 Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

**12.** Dokažte větu: „V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.“

**13.** Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod  $[1, 5]$ .

**14.** Je dána přímka  $p$  a dvě kružnice  $k_1, k_2$  oddělené přímkou  $p$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic  $k_1, k_2$  byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce  $p$ .

**15.** Jsou dány tři různé přímky  $p_1, p_2, p_3$ , procházející bodem  $S$ ; na přímce  $p_1$  je dán bod  $A \neq S$ . Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách  $p_1, p_2, p_3$ .

**16.** Jsou dány tři přímky  $o_1, o_2, o_3$  procházející bodem  $O$ . Na  $o_1$  dán bod  $A_1$ . Sestrojte  $\triangle ABC$  tak, aby  $o_1, o_2, o_3$  byly osami jeho stran a bod  $A_1$  středem strany  $BC$ .

**17.** Jsou dány body  $X, Y$  a přímka  $p$ , která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník  $ABC$ , jehož hlavním vrcholem je bod  $C$ , osou souměrnosti přímka  $p$  a jehož ramena mají danou velikost  $a$ . Přímka  $AC$  nechť prochází bodem  $X$  a přímka  $BC$  bodem  $Y$ .

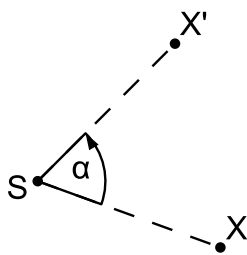
**18.** Je dána přímka  $p$  a body  $A, B$ , ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $p$ . Sestrojte bod  $X \in p$  tak, aby  $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$ .

**19.** Jsou dány body  $A, B, C$  a přímka  $p$  kolmá k přímce  $AB$  tak, že prochází bodem  $C$  a body  $A, B$  leží v téže polorovině určené přímkou  $p$ . Sestrojte na přímce  $p$  takový bod  $X$ , aby z něho byla vidět úsečka  $AB$  pod stejným úhlem jako úsečka  $BC$ .

**20.** Obrazy středu  $S$  kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  v osových souměrnostech podle přímek  $BC, AC, AB$  jsou vrcholy trojúhelníku  $A_1B_1C_1$ . Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem  $ABC$ .

### 5.3 Otočení

**Definice 19. Otočení neboli rotace** je zobrazení určené středem  $S$  a orientovaným úhlem velikosti  $\varphi$ , které bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a libovolnému bodu  $X \neq S$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že  $|X'S| = |XS|$  a orientovaný úhel  $XSX'$  má velikost  $\varphi$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{R}(S, \varphi)$ , bod  $S$  se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti  $\varphi$  je úhel otočení.



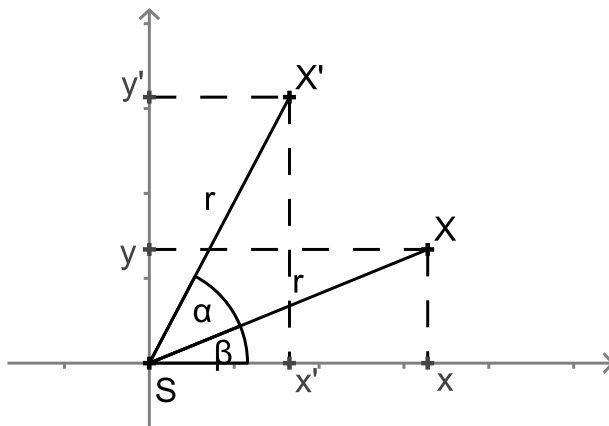
Obrázek 23: Otočení  $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

**Věta 12** (Alternativní definice otočení). *Shodnost s právě jedním samodružným bodem  $S$  je otočením; bod  $S$  je střed otočení.*

**PŘÍKLAD 5.6.** *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel  $\alpha$ . Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.*

*Řešení:* Postupujeme podle obrázku 24.



Obrázek 24: Otočení  $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel  $\alpha$  kolem počátku jsou

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

**Věta 13.** Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.

**Věta 14.** Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.

**Věta 15.** Otočení se středem  $S$  a úhlem velikosti  $\alpha$  převádí přímku  $p$  v přímku  $p'$  různoběžnou s  $p$ ; přitom dva vrcholové úhly, které  $p$  a  $p'$  tvoří, mají velikost  $\alpha$ .

### Analytické vyjádření otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu:  $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned}x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 5.7.** Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol  $A$  trojúhelníku  $ABC$  na bod  $B$ , bod  $B$  na bod  $C$  a bod  $C$  na bod  $A$ . Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.



### 5.3.1 Otočení - Úlohy

**21.** Jsou dány dvě shodné úsečky  $AB$ ,  $CD$ . Určete otočení, které zobrazí  $A$  na  $C$  a  $B$  na  $D$ .

**22.** Je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $P \neq S$ . Bodem  $P$  vedte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti  $d$ .

**23.** Jsou dány různé rovnoběžné přímky  $a, b, c$  a bod  $A$ , který leží na přímce  $a$ . Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky  $ABC$ , jejichž vrcholy  $B, C$  leží po řadě na přímkách  $b, c$ .

**24.** Je dána kružnice  $k(S; 3cm)$  a bod  $A$  ( $|SA| = 1.5cm$ ). Sestrojte všechny tětivy  $XY$  kružnice  $k$  o délce  $5.5cm$ , které procházejí bodem  $A$ .

**25.** Je dána kružnice  $k(S; r)$ , bod  $B$  a úsečka délky  $d$  ( $d < 2r$ ). Sestrojte tětivu  $XY$  kružnice  $k$  délky  $d$  tak, aby byla vidět z bodu  $B$  pod úhlem  $60^\circ$ .

### 5.3.2 Otočení - Úlohy na domácí přípravu

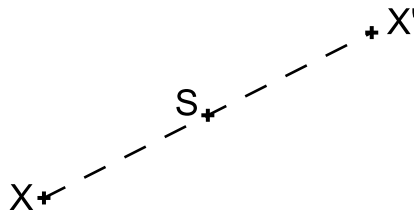
**26.** Jsou dány dvě rovnoběžné přímky  $a, b$  a mimo ně bod  $C$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník  $ABC$  tak, aby jeho vrcholy  $A, B$  ležely po řadě na přímkách  $a, b$ .

**27.** Jsou dány kružnice  $k$ , přímka  $p$  a bod  $A$  ležící vně  $k$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě  $A$  tak, aby zbývající vrcholy ležely na  $k$  a na  $p$ .

**28.** Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu GeoGebra.

## 5.4 Středová souměrnost

**Definice 20. Středová souměrnost** se středem  $S$  je shodné zobrazení, které bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a libovolnému bodu  $X \neq S$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že bod  $S$  je středem úsečky  $XX'$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{S}(S)$ .



Obrázek 25: Středová souměrnost  $\mathcal{S}(S)$

**Poznámka.** Středovou souměrnost můžeme chápat též jako speciální případ rotace  $\mathcal{R}(S, \alpha)$  pro  $\alpha = \pi$ , tj.  $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, \pi)$ .

Vlastnosti středové souměrnosti:

- 1) Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti  $S$ ; jedna z os je volitelná.
- 2) Vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé (střed souměrnosti  $S$  odpovídá průsečíku těchto os).
- 3) Je jednoznačně určena svým středem
- 4) Je to *involutorní zobrazení* (též *involuce*).
- 5) Středová souměrnost je *přímá shodnost*.
- 6) Středová souměrnost má jediný samodružný bod, střed  $S$ , a všechny směry samodružné.

**Věta 16.** V souměrnosti podle středu  $S$  je obrazem každé přímky přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem  $S$  je samodružná.

**Analytické vyjádření středové souměrnosti  $\mathcal{S}(S)$  v rovině**

Souřadnice středu:  $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned}x' &= -x + 2s_1 \\y' &= -y + 2s_2\end{aligned}$$

**Věta 17.** Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.

#### 5.4.1 Středová souměrnost - Úlohy

**29.** Je dána kružnice  $k(O; r)$  a přímka  $p$ , která má od středu  $O$  vzdálenost  $v > 0$ ; dále je dán bod  $S$ , který leží uvnitř poloroviny  $pO$ . Sestrojte úsečku se středem  $S$ , která má krajní body  $K, P$  po řadě na kružnici  $k$  a na přímce  $p$ .

**30.** Je dána kružnice  $k(S, r)$ . Bodem  $P$ , který leží vně kružnice  $k$ , vedte přímku  $p$ , která protíná kružnici v bodech  $A, B$  tak, že  $A$  je středem úsečky  $BP$ .

**31.** Je dán úhel  $AVB$  a bod  $S$  jeho vnitřku. Sestrojte na rameni  $VA$  bod  $X$  a na rameni  $VB$  bod  $Y$  tak, aby bod  $S$  byl středem úsečky  $XY$ .

**32.** Je dána úsečka  $AA_1$  ( $|AA_1| = 5\text{cm}$ ). Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , pro které je  $AA_1$  těžnicí  $t_a$  a pro které platí:  $c = 4\text{cm}, b = 7\text{cm}$ .

**33.** Je dána úsečka  $AA_1$  ( $|AA_1| = 5\text{cm}$ ). Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , pro které je  $AA_1$  těžnicí  $t_a$  a pro které platí:  $\gamma = 45^\circ, \beta = 60^\circ$ .

**34.** Jsou dány dvě kružnice  $k_1, k_2$ , které se protínají ve dvou bodech  $Q$  a  $R$ . Bodem  $Q$  vedte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.

#### 5.4.2 Středová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

**35.** Je dán trojúhelník  $ABC$  a jeho vnitřní bod  $M$ . Sestrojte všechny úsečky  $XY$  se středem  $M$  a s krajními body  $X, Y$  na hranici trojúhelníku.

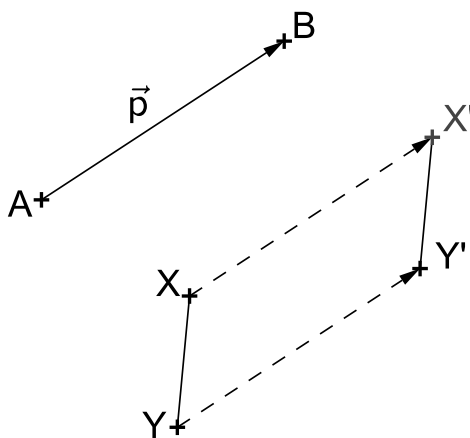
**36.** Vepište danému rovnoběžníku  $ABCD$  čtverec  $XYUV$  tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce.

**37.** Je dán úhel  $AVB$  a bod  $S$  jeho vnitřku. Sestrojte na rameni  $VA$  bod  $X$  a na rameni  $VB$  bod  $Y$  tak, aby  $XY S$  byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou  $XY$ .

**38.** Je dána úsečka  $AA_1$ ;  $|AA_1| = 4.5\text{cm}$ . Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $C$ , v nichž  $AA_1$  je těžnicí  $t_a$  a  $t_b = 6\text{cm}$ .

## 5.5 Posunutí (Translace)

**Definice 21.** Orientovanou úsečkou  $AB$  je dán vektor  $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ . **Posunutí** neboli **translace** je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje bod  $X'$  tak, že platí  $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$ , tj.  $X' = X + \vec{p}$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{T}(\vec{p})$ .



Obrázek 26: Posunutí  $\mathcal{T}(\vec{p})$

**Poznámka.** Posunutí (translaci) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je potom kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

**Věta 18.** Každou translaci lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.

**Věta 19.** Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné (tj. má všechny směry samodružné).

**Věta 20.** Nechť  $X'$  je obraz libovolného (proměnného) bodu  $X$  v dané translaci  $\mathbf{T}$ . Pak všechny přímky  $XX'$  jsou navzájem rovnoběžné a všechny úsečky  $XX'$  jsou navzájem shodné.

### 5.5.1 Analytické vyjádření posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině

Rovnice posunutí  $\mathcal{T}(\vec{p})$ , kde  $\vec{p} = (p_1, p_2)$ :

$$\begin{aligned}x' &= x + p_1 \\y' &= y + p_2\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 5.8.** Jaké zobrazení může být výsledkem skládání dvou posunutí?

### 5.5.2 Posunutí - Úlohy

- 39.** Jsou dány přímka  $p$  a dvě nesoustředné kružnice  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$ . Vedte přímku rovnoběžnou s přímkou  $p$  tak, aby na ní kružnice  $k_1, k_2$  vytínaly shodné tětivy. [1]
- 40.** Sestrojte čtyřúhelník  $ABCD$ , jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček  $|AC| = e$ ,  $|BD| = f$  a velikosti úhlů  $|\angle ABC| = 90^\circ$ ,  $|\angle ADC| = \delta$ . [2]
- 41.** Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran  $a, b, c, d$ . [1]
- 42.** Sestrojte čtyřúhelník  $ABCD$ , jsou-li dány velikosti jeho stran  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|CD| = c$ ,  $|DA| = d$  a odchylka  $\omega$  přímek  $AD, BC$ . [2]
- 43.** Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček. [1]
- 44.** Sestrojte lichoběžník  $ABCD$ , jsou-li dány délky obou jeho základů  $a, c$  a obou jeho úhlopříček  $e, f$ . [1]
- 45.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a úsečka délky  $r$ . Sestrojte všechny kružnice  $k$  se středem na přímce  $a$ , poloměrem  $r$ , které na přímce  $b$  vytínají tětivu délky  $r$ . [1]

## 5.6 Posunuté zrcadlení (Posunutá souměrnost)

**PŘÍKLAD 5.9.** Je dána přímka  $p$  a dva body  $A, B$  v téže polorovině s hraniční přímkou  $p$ . Na přímce  $p$  sestrojte úsečku  $XY$  délky  $d$  tak, aby součet  $|AX| + |XY| + |YB|$  byl co nejmenší.

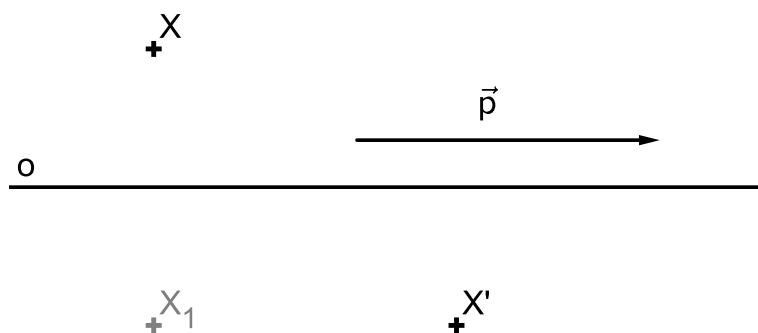
Víme, že každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností. V případech jedné a dvou osových souměrností už máme jasno - složením jedné osově souměrnosti může vzniknout samozřejmě jenom tato souměrnost, složením dvou osových souměrností pak lze vytvořit otočení (různoběžné osy), středovou souměrnost (kolmé osy), posunutí (rovnoběžné osy) a identitu (dvě totožné osy). Každé z těchto zobrazení je zároveň unikátní svou skladbou samodružných bodů a směrů

- osová souměrnost má přímku samodružných bodů a dva na sebe kolmé samodružné směry,
- otočení má jediný samodružný bod a žádný samodružný směr,
- středová souměrnost má jediný samodružný bod a všechny směry samodružné,
- identita má všechny body i směry samodružné.

Pokud existuje nějaké další shodné zobrazení, nemůže mít žádný samodružný bod (jinak by to bylo otočení, středová souměrnost, osová souměrnost nebo identita). Naším úkolem je proto vyšetřit, zda **existuje shodné zobrazení bez samodružných bodů, které vznikne složením tří osových souměrností.**

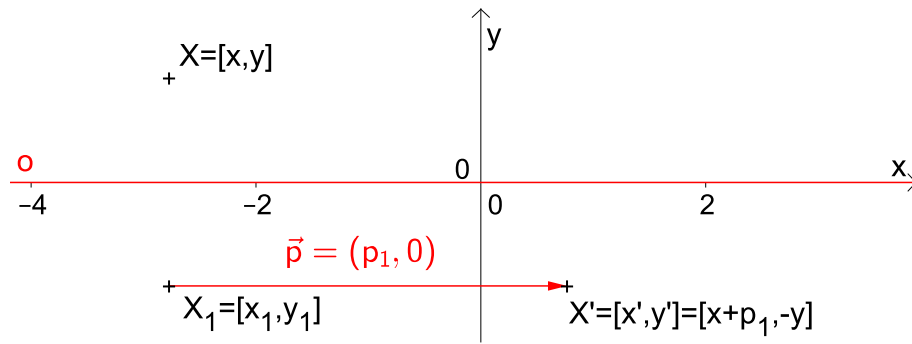
Ukáže se, že takové zobrazení skutečně existuje. Nazveme ho *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).

**Definice 22.** Je dána přímka  $o$ . Zobrazení složené z posunutí ve směru přímky  $o$  a osově souměrnosti podle osy  $o$  se nazývá *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).



Obrázek 27: Posunuté zrcadlení  $Z : X \rightarrow X'$





Obrázek 30: Posunuté zrcadlení  $\mathcal{Z} : X \rightarrow X'$

### 5.6.1 Analytické vyjádření posunutého zrcadlení

Posunuté zrcadlení dané osou souměrnosti v ose  $x$  a vektorem posunutí  $\vec{p} = (p_1, 0)$  (viz Obr. 30)

$$\mathcal{Z} : \begin{aligned} x' &= x + p_1, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

### 5.6.2 Posunuté zrcadlení – Úlohy na domácí přípravu

**46.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a na nich dva body  $A \neq B$  ( $A$  na  $a$ ,  $B$  na  $b$ ). Určete bod  $X$  na  $a$  a bod  $Y$  na  $b$  tak, aby platilo  $|AX| = |BY|$  a dále aby:

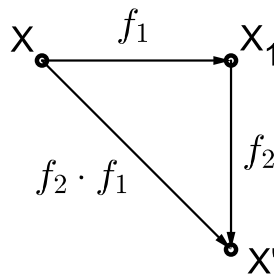
- $XY \parallel p$ , kde  $p$  je daná přímka; [1]
- $XY = d$ , kde  $d$  je předem daná úsečka; [1]
- střed úsečky  $XY$  ležel na dané přímce  $q$ . [1]



## 6 Skládání shodností v rovině

### 6.1 Skládání afinních zobrazení

**Definice 23** (Skládání afinních zobrazení). *Nechť  $f_1$  je afinní zobrazení prostoru  $A$  do  $A'$ ,  $f_2$  afinní zobrazení prostoru  $A'$  do  $A''$ . Jestliže každému bodu  $X \in A$  je v  $f_1$  přiřazen bod  $X_1 = f_1(X) \in A'$  a bodu  $X_1 = f_1(X)$  přiřazen bod  $X' = f_2(f_1(X)) \in A''$ , říkáme, že zobrazení  $f$  přiřazující bodu  $X$  bod  $X' = f_2(f_1(X))$  vzniklo složením zobrazení  $f_1$  a  $f_2$ . Zapisujeme  $f = f_2 \cdot f_1$ ,  $f = f_2 f_1$ ,  $f = f_2 \circ f_1$  nebo  $f = f_2(f_1(X))$ .*



Obrázek 31: Skládání zobrazení  $f_1$  a  $f_2$

**Věta 23.** *Složením dvou afinních zobrazení  $f_1, f_2$  vznikne opět afinní zobrazení  $f$ . Zobrazení  $\varphi$  asociované k  $f$  vznikne složením zobrazení  $\varphi_1, \varphi_2$  asociovaných po řadě k  $f_1, f_2$ .*

### 6.2 Skládání shodností v rovině

**PŘÍKLAD 6.1.** *V prostoru  $E_2$  jsou dány dvě středové souměrnosti  $\mathcal{S}_1$  a  $\mathcal{S}_2$ . Určete zobrazení  $Z_1 = \mathcal{S}_2 \cdot \mathcal{S}_1$  a  $Z_2 = \mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2$ .*

*Řešení:* Složením středové souměrnosti  $\mathcal{S}_1$  se středem  $S_1$  a středové souměrnosti  $\mathcal{S}_2$  se středem  $S_2 \neq S_1$  vznikne translace  $\mathcal{T}(2(S_2 - S_1))$ . Je-li  $S_1 \equiv S_2$  je  $\mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1$  identita.

**PŘÍKLAD 6.2.** *Může v rovině existovat útvar, který má dva středy souměrnosti?*

**PŘÍKLAD 6.3.** *V prostoru  $E_n$  je dáno posunutí  $T$  a středová souměrnost  $S$ . Určete zobrazení  $Z_1 = TS$  a  $Z_2 = ST$ .*

*Řešení:* Složením posunutí a středové souměrnosti v libovolném pořadí vznikne středová souměrnost.

**PŘÍKLAD 6.4.** Rozhodněte, jaké zobrazení vznikne složením translace  $\mathcal{T}$  a rotace  $\mathcal{R}$ , která není středovou souměrností. Uvažujte obě pořadí skládání těchto zobrazení.

*Shrnutí*

- Složením (v libovolném pořadí) translace  $\mathcal{T}$  a rotace  $\mathcal{R}$ , která není středovou souměrností, vznikne rotace téhož smyslu i úhlu jako  $\mathcal{R}$ .
- Složením dvou translací vznikne translace nebo identita.
- Složením posunutí a středové souměrnosti v libovolném pořádku vznikne středová souměrnost.
- Složením středové souměrnosti  $\mathcal{S}_1$  se středem  $S_1$  a středové souměrnosti  $\mathcal{S}_2$  se středem  $S_2 \neq S_1$  vznikne translace  $\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S'_2)$ , přičemž úsečka  $S_1S'_2$  má střed  $S_2$ . Je-li  $S_1 \equiv S_2$  je  $\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1$  identita.

### 6.3 Shodnosti přímé a nepřímé

- (a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.
- (b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

### 6.4 Grupa shodností v rovině

Poznatky získané řešením výše uvedených příkladů nasvědčují tomu, že množina shodností v rovině spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu<sup>1</sup>. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy.

**PŘÍKLAD 6.5.** *Ověřte následující tvrzení:*

- (a) *Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu  $G_S$ .*
- (b) *Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu  $G'_S$  grupy  $G_S$ .*
- (c) *Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.*

<sup>1</sup>Množinu  $G$ , v níž je definována operace  $\circ$  nazýváme grupou vzhledem k operaci  $\circ$  (značíme  $(G, \circ)$ ), právě když:

a) Výsledek operace  $\circ$  je pro každou dvojici prvků  $G$  opět prvkem  $G$  (říkáme, že operace  $\circ$  je na  $G$  neomezeně definovaná, nebo, že množina  $G$  je uzavřená vzhledem k operaci  $\circ$ ).

b) Operace  $\circ$  je asociativní v množině  $G$ .

c) Operace  $\circ$  má neutrální prvek  $n \in G$ .

d) Ke každému prvku  $k \in G$  existuje inverzní prvek  $k^{-1} \in G$  vzhledem k operaci  $\circ$ .

Je-li navíc operace  $\circ$  komutativní v množině  $G$ , nazýváme algebraickou strukturu  $(G, \circ)$  komutativní grupou.

(d) Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy  $G'_S$ .

**PŘÍKLAD 6.6.** *Trojúhelník  $ABC$  byl převeden otočením daného smyslu se středem  $S$  a úhlem velikosti  $\omega = 120^\circ$  v trojúhelník  $A_1B_1C_1$ , který byl dále převeden posunutím  $\mathcal{T}(A_1 \rightarrow A_2)$  v trojúhelník  $A_2B_2C_2$ . Určete otočení, které převádí přímo  $\triangle ABC$  v  $\triangle A_2B_2C_2$ .*

**PŘÍKLAD 6.7.** *Je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$ . Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

## 7 Klasifikace shodností roviny

**Myšlenka úplné klasifikace shodností:** Klasifikace shodností roviny je založena na výpočtu samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (34)$$

Viz též (21) a (22) na straně 24. Postup tohoto výpočtu a způsob identifikace příslušného zobrazení pomocí jeho samodružných bodů a směrů je ilustrován podrobným řešením příkladu 5.2 na stranách 29–33.

**Poznámka.** V řešení příkladu 5.2 jsme neuvedli úplné popisy identifikovaných shodností. V případě otočení (viz str. 32) jsme neurčili úhel  $\alpha$ . U posunutého zrcadlení (viz str. 33) jsme se nevěnovali nalezení osy  $o$  a vektoru posunutí  $\vec{t}$ . Nyní již máme všechny znalosti potřebné k tomu, abychom tyto údaje našli.

### 7.1 Klasifikace shodností roviny

Z podmínky  $A^T \cdot A = E$  plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2,\end{aligned}$$

je shodností právě tehdy, když platí rovnosti

$$\begin{aligned}a_{11}^2 + a_{21}^2 &= a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} = 0\end{aligned}$$

Vzhledem k platnosti vztahu  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  je zřejmé, že existuje úhel  $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$  takový, že lze napsat

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \alpha, \\a_{21} &= \sin \alpha, \\a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha &= 0, \\a_{22} &= \varepsilon \cos \alpha, \\a_{12} &= -\varepsilon \sin \alpha, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1.\end{aligned}$$

Hodnota  $\varepsilon$  určuje, zda se jedná o shodnost přímou ( $\varepsilon = 1$ ) nebo nepřímou ( $\varepsilon = -1$ ).

## I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1, \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

### Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1(1 - \cos \alpha) + x_2 \sin \alpha &= b_1, \\-x_1 \sin \alpha + x_2(1 - \cos \alpha) &= b_2.\end{aligned}\tag{35}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (35) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (1 - \cos \alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1 - \cos \alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos \alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

#### 1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření otočení kolem počátku o úhel  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.\end{aligned}$$

### Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{aligned}u_1(\lambda - \cos \alpha) + u_2 \sin \alpha &= 0, \\-u_1 \sin \alpha + u_2(\lambda - \cos \alpha) &= 0.\end{aligned}\tag{36}$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (\lambda - \cos \alpha) \end{vmatrix} = 0. \quad (37)$$

Úpravou (37) dostaneme rovnici

$$(\lambda - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že  $\sin \alpha = 0$  a zároveň  $\cos \alpha = \lambda$ , kde  $\lambda = \pm 1$ <sup>1</sup>.

Pro  $\cos \alpha = -1$  dostáváme

## 2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1 + b_1, \\ x'_2 &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Je-li  $\cos \alpha = 1$ , dostaneme pro  $b_1 = b_2 = 0$ ,

## 3) IDENTITU

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= x_2 \end{aligned}$$

a pro  $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$

## 4) POSUNUTÍ

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + b_1 \\ x'_2 &= x_2 + b_2. \end{aligned}$$

## II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2. \end{aligned}$$

### Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos \alpha), & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (\lambda + \cos \alpha) \end{vmatrix} = 0, \quad (38)$$

<sup>1</sup>Pro shodná zobrazení je  $|\lambda| = 1$ . Jinak by vektor  $\vec{u}$  samodružného směru v zobrazení  $\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$  nezachoval svou velikost.

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

která odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro  $\lambda = 1$ , se zachovává, druhý, pro  $\lambda = -1$ , se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa  $x$  měla směr odpovídající  $\lambda = 1$ . Směr osy  $y$  pak zřejmě odpovídá  $\lambda = -1$ . Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je  $b_1 = 0$ , má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je ale  $b_1 \neq 0$ , má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

## 7.2 Shodnosti v rovině - Úlohy

**47.** Určete parametr  $s$  tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body  $[0, 0]$ ,  $[3, 4]$  po řadě na body  $[5, 0]$ ,  $[9, s]$ . Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu  $[5, 0]$ .

**48.** Určete  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tak, aby rovnice  $x' = \frac{3}{4}x + by + 1$ ,  $y' = ax + cy - 1$  vyjadřovaly shodnost.

**49.** Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

a)  $x' = x + \frac{1}{2}y + 1$ ,  $y' = ax + \frac{1}{2}y - 1$ ,  $z' = bx + cy + 3$ ,

b)  $x' = x + by - 2$ ,  $y' = \frac{1}{2}y + 1$ ,  $z' = ax + cy - 3$ .

Určete koeficienty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**50.** Najděte souřadnice obrazu bodu  $B = [1, 2]$  v otočení v  $E_2$  kolem středu  $S = [3, -4]$  o úhel  $\alpha = 420^\circ$ . Napište rovnice této shodnosti.

**51.** Určete  $p$ ,  $q$  tak, aby existovala shodnost zobrazující body  $[3, 0]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[-1, -1]$  po řadě na body  $[1, 4]$ ,  $[p, 2]$ ,  $[2, q]$ . Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

**52.** Napište rovnice středové souměrnosti v  $E_2$  podle středu  $S = [-4, 5]$ .

**53.** Napište rovnice shodnosti roviny  $E_2$ , která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x - 2y = 0$ .

**54.** Rotace kolem bodu  $S = [2; 1]$  v  $E_2$  zobrazuje bod  $A = [1; 1]$  na bod  $A'$ . Najděte souřadnice bodu  $A'$ , jestliže pro úhel rotace  $\alpha$  platí  $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ .

**55.** Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi:  $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$ ,  $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$ .

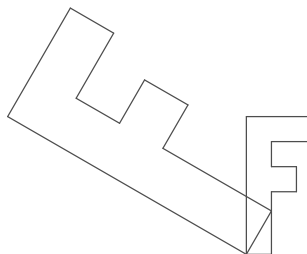
**56.** Najděte rovnice obrazu přímky  $p$  v rotaci v  $E_2$  kolem středu  $S = [-2; 1]$  o úhel  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , jestliže  $p : x - y + 1 = 0$ .



## 8 Podobná zobrazení

### 8.1 Podobné zobrazení

**Úkol:** Napište rovnice pro zobrazení v rovině, které každý útvar otočí kolem počátku o úhel  $\alpha$  a dvakrát zvětší (viz Obr. 1).



Obrázek 32: Podobné zobrazení v rovině

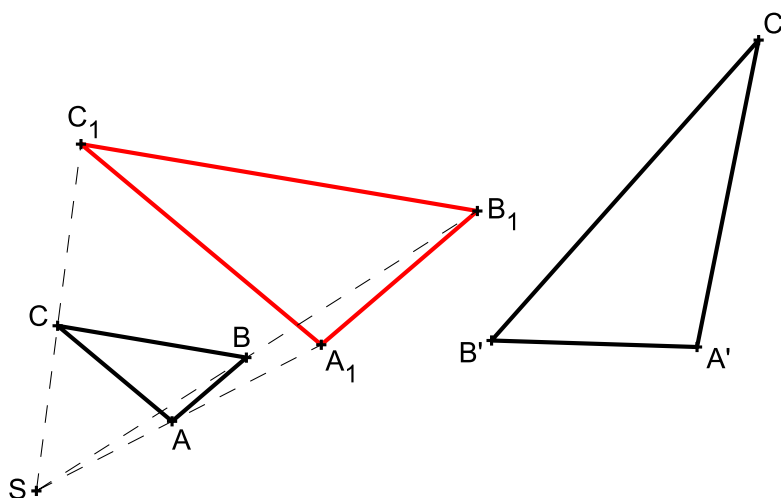
**Definice 24.** Zobrazení  $f$  roviny (euklidovského prostoru  $E_2$ ) na sebe se nazývá „podobnou transformací roviny“ (též „podobností v rovině“), jestliže existuje kladné reálné číslo  $k$  tak, že pro každé dva body  $X, Y$  roviny a jejich obrazy  $X', Y'$  platí:

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Číslo  $k$  se nazývá koeficient podobnosti  $f$ .

#### Poznámky.

1. Každé podobné zobrazení je afinní.
2. Podobnosti s koeficientem  $k \neq 1$  nazýváme *vlastní podobností*.



Obrázek 33: Každou podobnost lze rozložit na stejnoolehlost a shodnost

**Věta 24.** Každou podobnost v rovině s poměrem podobnosti  $k$  lze rozložit na stejnoolehlost  $H(S, k)$  a shodnost  $Z$ . Přitom střed stejnoolehlosti můžeme volit libovolně a shodnost  $Z$  je tím určena jednoznačně.

**Věta 25** (O určenosti podobnosti v rovině). Každá podobnost v rovině je jednoznačně určena trojúhelníkem  $ABC$  a jeho obrazem  $A'B'C'$  takovým, že  $|A'B'| = k|AB|$ ,  $|B'C'| = k|BC|$ ,  $|A'C'| = k|AC|$ , kde  $k, k > 0$ , je koeficient této podobnosti.

**PŘÍKLAD 8.1.** V euklidovské rovině je dán čtverec  $ABCD$  se středem  $S$ . Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body  $A, B, S$  zobrazí po řadě na body  $D, B, C$ . Rozložte toto podobné zobrazení na stejnoolehlost a shodné zobrazení.

**Věta 26.** Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď stejnoolehlost, nebo stejnoolehlost složená s otočením kolem středu stejnoolehlosti, nebo stejnoolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem souměrnosti.

**Věta 27.** Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.

## 9 Stejnolehlost

Patří mezi tzv. homotetie, tj. afinní zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

**Definice 25.** *Budiž dán bod  $S$  a reálné číslo  $\kappa$  (různé od 0 a 1). Stejnolehlost  $H(S; \kappa)$  se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřadí bod  $X'$  tak, že*

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}.$$

**Poznámka.** Stejnolehlost můžeme definovat i více popisně: *Budiž dán bod  $S$  a reálné číslo  $\kappa$  (různé od 0 a 1). Stejnolehlost  $H(S; \kappa)$  se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřadí bod  $X'$  tímto způsobem:*

1. Pro  $X \equiv S$  je  $X' \equiv X$ ,
2. Pro  $X \neq S$  je  $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$ ,  
pro  $\kappa > 0$  leží  $X'$  leží na polopřímce  $\overrightarrow{SX}$  a  
pro  $\kappa < 0$  leží  $X'$  leží na polopřímce opačné k  $\overrightarrow{SX}$ .

**Poznámka.** Zobrazení inverzní k stejnoolehlosti  $H(S; \kappa)$  je stejnoolehlost  $H^{-1}\left(S; \frac{1}{\kappa}\right)$ .

**Základní vlastnosti stejnoolehlosti  $H(S, \kappa)$ :**

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
2. Obrazem úsečky  $AB$  je úsečka  $A'B'$ ;  $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$ .
3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ( $\kappa > 0$ ) nebo nesouhlasně ( $\kappa < 0$ ) rovnoběžná .
4. Obrazem úhlu  $\angle AVB$  je úhel  $\angle A'V'B'$ ;  $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$ .

**PŘÍKLAD 9.1.** *Jsou dány dva různé body  $A, B$  a reálné číslo  $\lambda \neq 0, 1$ . Najděte na přímce  $AB$  bod  $C$  tak, aby platilo  $(ABC) = \lambda$ .*

## 9.1 Analytické vyjádření stejnolehlosti

Rovnice stejnolehlosti  $H(S; \kappa)$ :  $H : X' = \kappa X + (1 - \kappa)S$ .

**PŘÍKLAD 9.2.** *Napište rovnice stejnolehlosti afinní roviny  $\mathbf{A}_2$ , která zobrazuje bod  $B = [2, 0, -1]$  na bod  $C = [0, 1, 3]$  a má koeficient  $\kappa = -2$ . Najděte souřadnice jejího středu.*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) B:[2,0,-1]$ C:[0,1,3]$ S:[s1,s2,s3]$
```

```
(%i4) H:C-S=-2*(B-S);
```

```
(%o4) [-s1, 1 - s2, 3 - s3] = [-2 (2 - s1), 2 s2, -2 (-s3 - 1)]
```

```
(%i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H), [s1,s2,s3])[1];
```

```
(%o5) [s1 =  $\frac{4}{3}$ , s2 =  $\frac{1}{3}$ , s3 =  $\frac{1}{3}$ ]
```

```
(%i6) S:ev(S,res);
```

```
(%o6) [ $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ]
```

## 9.2 Skládání stejnolehlostí

**Věta 28** (O skládání stejnolehlosti a translace). *Zobrazení složené ze stejnolehlosti  $H(S; \kappa)$  a translace  $X' = X + \vec{t}$  je stejnolehlost  $H'(Q; \kappa)$ , kde  $Q = S + \frac{1}{1 - \kappa}\vec{t}$ .*

**Věta 29** (O skládání stejnolehlostí). *Složením dvou stejnolehlostí  $H_1(S_1, \kappa_1)$ ,  $H_2(S_2, \kappa_2)$  vznikne*

1. *IDENTITA*, jestliže  $\kappa_1\kappa_2 = 1$  a  $S_1 = S_2$ ,

2. *POSUNUTÍ*, jestliže  $\kappa_1\kappa_2 = 1$  a  $S_1 \neq S_2$ ,

3. *STEJNOLEHLOST*  $H(S, \kappa)$  s koeficientem  $\kappa = \kappa_1\kappa_2$ , jestliže  $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$ . Přitom, pro  $S_1 = S_2$  je také  $S = S_1 = S_2$ , pro  $S_1 \neq S_2$  leží bod  $S$  na přímce  $S_1S_2$ .

### 9.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice  $k_1(S_1; r_1)$ ,  $k_2(S_2; r_2)$  s různými poloměry existují právě dvě stejno-  
lehlosti, které převádějí kružnici  $k_1$  do kružnice  $k_2$ :  $H_1(E, r_2/r_1)$  a  $H_2(I, -r_2/r_1)$  (Bod  
 $E$  se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod  $I$  potom jako „vnitřní  
střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě  $T$ , je  $T = I$  v případě  
vnějšího dotyku a  $T = E$  v případě vnitřního dotyku kružnic.

**Věta 30** (Mongeova věta). *Jsou-li  $k_1, k_2, k_3$  tři kružnice, které mají různé poloměry  
a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých  
dvou z nich následující vztahy:*

- i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti  $E_{12}, E_{13}, E_{23}$  leží v přímce.*
- ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.*
- iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti  $I_{12}, I_{13}, I_{23}$  neleží v přímce.*

**PŘÍKLAD 9.3.** *Je dána kružnice  $k$ , přímka  $p$ , která je vnější přímkou kružnice  
 $k$ , a bod  $A \in p$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky  $p$  v bodě  $A$  a  
kružnice  $k$ .*

**PŘÍKLAD 9.4.** *Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a bod  $M$ , který leží uvnitř jednoho  
jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem  $M$  a dotýkají se pří-  
mek  $a, b$ .*

**PŘÍKLAD 9.5.** *Jsou dány dvě různoběžky  $m, n$  a kružnice  $k$  ležící uvnitř jednoho  
jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek  $m, n$  i kružnice  $k$ .*

**PŘÍKLAD 9.6. (Eulerova přímka)** *V trojúhelníku  $ABC$  označme  $T$  těžiště,  $V$   
průsečík výšek a  $S$  střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny  
tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova  
přímka) tak, že platí  $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$ .*

**PŘÍKLAD 9.7. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kruž-  
nice)** *V trojúhelníku  $ABC$  označme  $V$  průsečík výšek,  $S$  střed kružnice opsané,  
 $C_1, A_1, B_1$  středy stran  $AB, BC, CA$ . Nechť  $k_0$  je kružnice procházející body  $A_1, B_1, C_1$ .  
Dokažte:*

- 1) Na kružnici  $k_0$  leží též paty  $A_0, B_0, C_0$  výšek  $v_a, v_b, v_c$  a středy úseček  $AV, BV, CV$ .*
- 2) Střed kružnice  $k_0$  je středem úsečky  $SV$ , pokud  $S \neq V$ ; pokud je  $S \equiv V$  splyne  
střed  $k_0$  s bodem  $S$ .*
- 3) Poloměr kružnice  $k_0$  je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.*

**PŘÍKLAD 9.8.** *Platí tato věta: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?*

### 9.3.1 Stejnolehlost – Úlohy

**57.** Do půlkruhu s průměrem  $AB$  vepište čtverec  $KLMN$  tak, aby strana  $KL$  ležela na úsečce  $AB$  a další dva vrcholy  $M, N$  na dané půlkružnici. [2]

**58.** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a bod  $A$ . Sestrojte všechny úsečky  $XY$  tak, aby platilo:  $X \in p, Y \in k, A \in XY, |AY| = 3|AX|$ . [2]

**59.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a kružnice  $k$  tak, že  $a$  je sečnou a  $b$  je vnější přímkou kružnice  $k$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek  $a, b$  i kružnice  $k$ . [2]

**60.** Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $v_a = 5\text{cm}, a : b : c = 2 : 3 : 4$ , [1]

b)  $\alpha, \beta, v_c$ , [1]

c)  $\alpha, \beta, t_c$ , [1]

d)  $a : b = 3 : 5, \gamma = 60^\circ, t_c = 6\text{cm}$ . [1]

### 9.3.2 Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu

**61.** Určete  $p$  tak, aby existovala stejnolehlost se středem  $[3, 2]$ , zobrazující bod  $[1, 4]$  na bod  $[2, p]$ . Napište rovnice této stejnolehlosti. [2]

**62.** Je dána kružnice  $k$  a bod  $M$  uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětivy kružnice, které jsou bodem  $M$  rozděleny na části v poměru  $2 : 3$ . [1]

**63.** Narýsujte libovolný trojúhelník  $ABC$ . Uvnitř strany  $AC$  sestrojte bod  $X$  a uvnitř strany  $BC$  bod  $Y$  tak, aby platilo  $|AX| = |XY|$  a  $XY \parallel AB$ . [2]

## 9.4 Podobnosti eukleidovské roviny

### Grupa podobností

Množina všech podobností eukleidovského prostoru  $E_n$  spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru  $E_n$* .

Víme, že každé podobné zobrazení eukleidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnolehlosti* a *shodnosti*.

**1. Stejnolehlost  $H$**  volíme se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem  $k > 0$  :

$$H : X \mapsto \bar{X}; \quad \bar{x} = kx \\ \bar{y} = ky.$$

**2. Shodnost  $S$**  je buď přímá nebo nepřímá:

$$S : \bar{X} \mapsto X'; \quad x' = \bar{x} \cos \alpha \mp \bar{y} \sin \alpha + p \\ y' = \bar{x} \sin \alpha \pm \bar{y} \cos \alpha + q.$$

Výsledkem složení  $S \circ H$  je potom přímá nebo nepřímá podobnost.

Přímá podobnost	Nepřímá podobnost
$x' = kx \cos \alpha - ky \sin \alpha + p \\ y' = kx \sin \alpha + ky \cos \alpha + q.$	$x' = kx \cos \alpha + ky \sin \alpha + p \\ y' = kx \sin \alpha - ky \cos \alpha + q.$
$x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q.$	$x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q.$
$A^T \cdot A = (a^2 + b^2) \cdot I; \quad k = \sqrt{a^2 + b^2}$	

**Věta 31.** *Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď stejnolehlost, nebo stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnolehlosti, nebo stejnolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.*



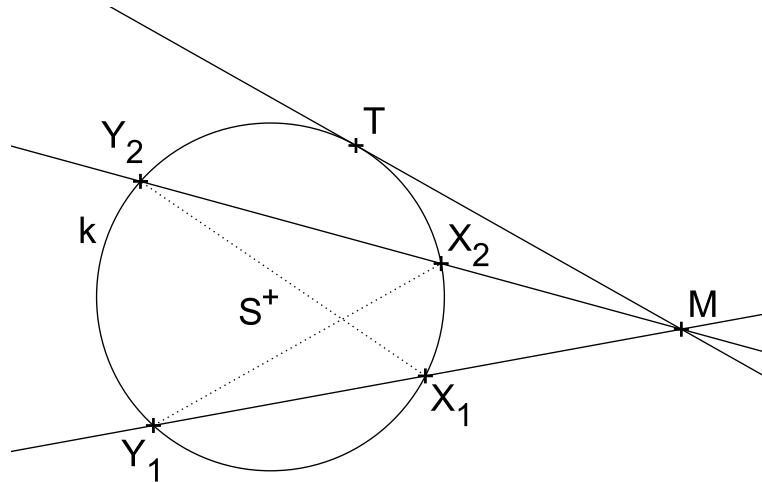
### 9.4.1 Úlohy – Podobnosti

1. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod  $[1, 0]$  zobrazí na bod  $[4, -2]$  a bod  $[2, 3]$  na bod  $[2, -8]$ .
2. **Eulerovými body** se nazývají středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek. Dokažte následující tvrzení: *Středy stran, paty výšek a Eulerovy body libovolného trojúhelníku leží na jedné kružnici. (Tato kružnice se nazývá kružnice devíti bodů, Eulerova kružnice nebo Feuerbachova kružnice.)*
3. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod  $[0, 2]$ , bod  $[1, 1]$  na počátek a bod  $[2, 0]$  na bod  $[2, p]$ . Určete  $p$  a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti.
4. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu  $[5, -3]$  je bod  $[1, 1]$ .
5. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod  $[1, 1]$  a směr vektoru  $(1, 1)$  samodružné.
6. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body  $[1, 2]$  a  $[0, 1]$  po řadě na body  $[3, -1]$ ,  $[4, 2]$ . Rozložte je na stejnoolehlost a shodnost.
7. V rovině je dán čtverec  $ABCD$  se středem  $S$ . Určete obraz bodu  $C$  v podobnosti, která zobrazuje body  $A, B, S$  po řadě na body  $B, D, C$ . Určete samodružný bod této podobnosti.
8. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník  $ABC$ , pro který platí  $|AB| : |AC| = 3 : 5$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\rho = 1,8\text{cm}$  (poloměr kružnice vepsané).
9. Sestrojte kosodélník  $ABCD$ , je-li dáno  $|\angle DAB| = \alpha$ ,  $|\angle ABD| = \varepsilon$ ,  $|AC| = e$ .
10. Je dána kružnice  $k$  a bod  $A$ , který je bodem vnější oblasti kružnice  $k$ . Sestrojte všechny sečny kružnice  $k$ , které procházejí bodem  $A$  a pro jejichž průsečíky  $X, Y$  s kružnicí platí  $|AX| = 2|AY|$ .
11. Je dána kružnice  $k(S; 4\text{cm})$ , její tečna  $t$  a bod  $M \in k$  tak, že  $|Mt| = 2\text{cm}$ . Sestrojte úsečku  $XY$  procházející bodem  $M$  tak, aby  $X \in k, Y \in t$  a  $|MX| : |MY| = 3 : 2$ .
12. Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a kružnice  $k$  tak, že  $P \in a \cap b$  je bodem vnitřní oblasti kružnice  $k$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek  $a, b$  i kružnice  $k$ .

## 10 Mocnost bodu ke kružnici

**Definice 26.** Mocností bodu  $M$  ke kružnici  $k(S; r)$  rozumíme reálné číslo  $m$ , pro které platí:

- (1)  $|MX| \cdot |MY| = |m|$ , kde  $X, Y$  jsou průsečíky kružnice  $k$  s její libovolnou sečnou procházející bodem  $M$ .
- (2) Je-li  $M$  vnějším bodem kružnice  $k$ , je  $m > 0$ .
- (3) Je-li  $M$  vnitřním bodem kružnice  $k$ , je  $m < 0$ .
- (4) Je-li  $M \in k$ , je  $m = 0$ .



Obrázek 34: Mocnost bodu  $M$  ke kružnici  $k$

**Věta 32.** Je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $M$ , který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice  $k$ , které procházejí bodem  $M$ , jejichž průsečíky s kružnicí  $k$  označíme  $X_1, Y_1$  a  $X_2, Y_2$ , platí

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

**Věta 33.** Nechť je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $M$ . Potom pro mocnost  $m$  bodu  $M$  ke kružnici  $k$  platí

$$m = d^2 - r^2,$$

kde  $d = |MS|$  je vzdálenost bodu  $M$  od středu kružnice  $k$ .

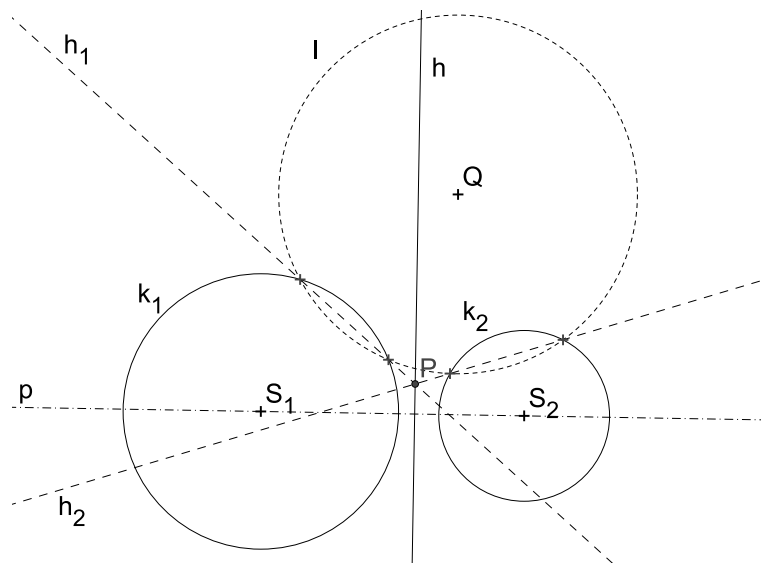
**Věta 34.** Nechť  $M$  je vnější bod kružnice  $k(S; r)$ ,  $m$  jeho mocnost ke kružnici  $k$ . Jestliže  $T$  je dotykový bod tečny vedené z bodu  $M$  ke kružnici  $k$ , tak platí  $|MT|^2 = m$ .

## 10.1 Chordála a potenční střed

**Věta 35** (Chordála dvojice kružnic). *Nechť jsou  $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$  dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů  $X$ , které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, je přímka  $h \perp S_1S_2$ . Jestliže kružnice  $k_1, k_2$  mají společný bod  $M$ , potom přímka  $h$  prochází tímto bodem.*

**Poznámka.** Přímka  $h$ , která je množinou bodů  $X$ , majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím  $k_1, k_2$  se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic  $k_1, k_2$ .

**Poznámka.** Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).



Obrázek 35: Chordála  $h$  kružnic  $k_1, k_2$ , potenční bod  $P$  kružnic  $k_1, k_2, l$

### Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic  $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1), k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$  s rovnicemi  $k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$  a  $k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$  můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2 \quad (39)$$

**PŘÍKLAD 10.1.** *Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic  $k_1, k_2$ , které nemají společný bod.*

**PŘÍKLAD 10.2.** Určete analyticky množinu všech bodů roviny, které mají ke dvěma daným kružnicím stejnou mocnost.

**PŘÍKLAD 10.3.** Sestrojte kružnici  $k$ , která prochází danými body  $A \neq B$  a dotýká se dané přímky  $t$ .

## 10.2 Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici

**64.** Je dán úhel  $\angle AVB$  a uvnitř něho bod  $M$ . Sestrojte kružnici, která prochází bodem  $M$  a dotýká se přímek  $AV, BV$ .

**65.** Obdélník má velikosti stran  $a, b$ . Máme sestrojit

a) libovolný obdélník stejného obsahu,

b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost  $c$ .

**66.** Jsou dány dvě nesoustředné kružnice  $k_1, k_2$  a přímka  $p$ . Na této přímce určete bod  $P$  tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím  $k_1, k_2$  měly stejnou délku.

**67.** Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice  $k(S; r)$  a prochází dvěma různými body  $A, B$ , které leží vně dané kružnice  $k$ .

**68.** Je dán lichoběžník  $ABCD$  se základnami  $AB, CD$ ,  $|AB| > |CD|$ . Uvnitř úsečky  $AD$  sestrojte bod  $P$  a uvnitř úsečky  $BC$  bod  $Q$  tak, aby platilo zároveň  $PQ \parallel AB$  a  $PC \parallel AQ$ .

**69.** Sestrojte lichoběžník  $ABCD$ , jsou-li dány délky jeho ramen  $|BC| = 4.5\text{cm}$ ,  $|DA| = 3\text{cm}$  a velikost  $75^\circ$  úhlu, který svírají přímky  $BC$  a  $AD$ , platí-li navíc  $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ .

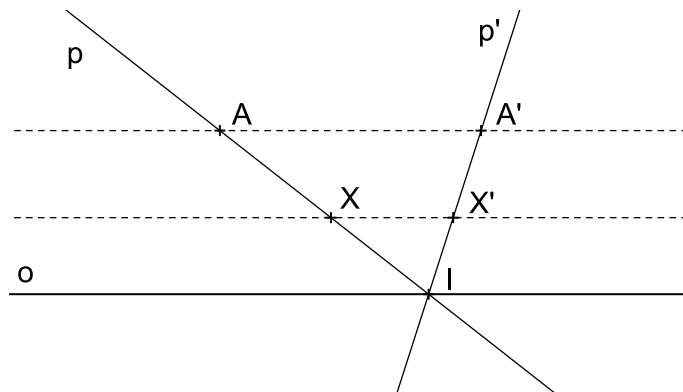
## 11 Osová afinita

Určení osové afinity. Charakteristika a rovnice osové afinity. Elace. Základní afinity. Involuce.

### 11.1 Základní afinity

„Základními afinitami“ nazýváme afinity, jejichž všechny samodružné body tvoří nadrovinu prostoru  $A_n$ . Příklady základních afinit jsou „osová afinita v  $A_2$ “, „osová souměrnost v  $E_2$ “ nebo „rovinová souměrnost v  $E_3$ “.

Základní afinita taková, že přímka spojující vzor a obraz je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, se nazývá „elace“.



Obrázek 36: Osová afinita v rovině, jejíž směr je rovnoběžný s její osou, jako příklad elace

### 11.2 Osová afinita v rovině

Osová afinita je určena osou  $o$ , směrem  $s$  a charakteristikou  $\kappa$ . Směr a charakteristika jsou většinou zadány dvojicí sobě odpovídajících bodů  $A, A'$ .

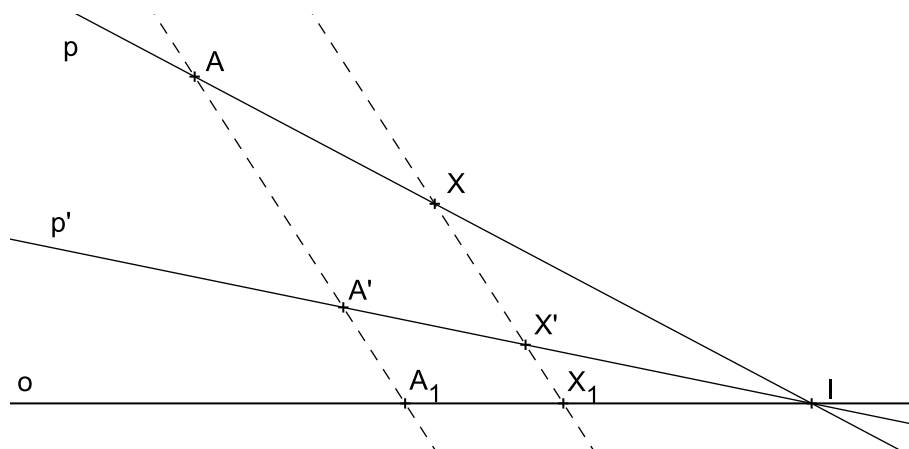
**PŘÍKLAD 11.1.** V osově afinitě určené osou  $o$  a dvojicí sobě odpovídajících bodů  $A, A'$  zobrazte bod  $X$  a přímku  $p$ .

*Řešení:* Viz Obr. 37. Při určení obrazu bodu a přímky využijeme

#### Vlastnosti osové afinity

- (1) Přímka spojující sobě odpovídající body je rovnoběžná se směrem afinity.
- (2) Sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity.

- (3) Incidence se zachovává.
- (4) Osa afinity a přímky rovnoběžné se směrem afinity jsou samodružnými přímkami.



Obrázek 37: Osová afinita v rovině, řešení příkladu 11.1

Postupujeme tak, že sestrojíme přímku  $p = \overleftrightarrow{AX}$  a určíme její průsečík  $I$  s osou afinity  $o$ . Z vlastnosti (2) vyplývá, že přímka  $p'$ , která je obrazem přímky  $p$ , také prochází bodem  $I$ . Z vlastnosti (3) pak plyne, že  $p'$  prochází rovněž bodem  $A'$ . Sestrojíme tedy přímku  $p' = \overleftrightarrow{A'I}$ . Obraz bodu  $X$ , bod  $X'$ , pak určíme podle vlastnosti (1) jako průsečík  $p'$  s přímkou jdoucí bodem  $X$  rovnoběžně s  $\overleftrightarrow{AA'}$ .

### Charakteristika osově afinity

Charakteristikou osově afinity  $\kappa$  rozumíme dělicí poměr

$$(A'AA_1) = \kappa,$$

kde body  $A, A'$  jsou ve vztahu „vzor a obraz“ a bod  $A_1$  je průsečík přímky  $AA'$  s osou afinity  $o$ , viz Obr. 37. Charakteristika osově afinity je rovna jejímu modulu, proto se  $\kappa$  nazývá také modul osově afinity.

**Poznámka.** „Osová souměrnost v rovině“ je zvláštním případem osově afinity, jejíž směr  $\vec{s}$  je kolmý na osu  $o$  ( $\vec{s} \perp o$ ) a jejíž charakteristika  $\kappa$  je rovna  $-1$  ( $\kappa = -1$ ).

**PŘÍKLAD 11.2.** Je dána přímka  $o$ , trojúhelník  $ABC$  a dvojice bodů  $X, X'$ . Sestrojte obraz trojúhelníka  $ABC$  v osově afinitě s osou  $o$ , v níž je obrazem bodu  $X$  bod  $X'$ .

**Věta 36.** *Rovnoběžné přímky  $a \parallel b$  se v osové afinitě zobrazí opět na rovnoběžné přímky  $a' \parallel b'$ .*

*Důkaz.* Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že obrazy rovnoběžných přímek jsou různoběžky. Dostaneme se do sporu s definicí charakteristiky afinity.  $\square$

**Věta 37.** *Dělicí poměr se v osové afinitě zachovává, tj.  $(ABC) = (A'B'C')$ .*

Důsledky věty 37:

- 1) Střed úsečky se zobrazí zase na střed úsečky.
- 2) Zachovává se uspořádání bodů na přímce.

**PŘÍKLAD 11.3.** *Je dána přímka  $o$  a trojúhelník  $ABC$ . Sestrojte obraz  $A'B'C'$  trojúhelníka  $ABC$  v takové osové afinitě s osou  $o$ , aby byl trojúhelník  $A'B'C'$  rovnostranný.*

*(Postup konstrukce viz <http://tube.geogebra.org/student/mni2IYH1c>)*

**Věta 38.** *Nechť  $P$  je obsah trojúhelníka  $ABC$  a  $P'$  obsah jeho obrazu  $A'B'C'$  v osové afinitě s charakteristikou  $\kappa$ . Potom  $P' = |\kappa| \cdot P$ .*

Z výše uvedených vět 36, 37, 38 plyne, že osová afinita má následující invarianty.

### Invarianty osové afinity

- (1) Rovnoběžnost přímek.
- (2) Dělicí poměr.
- (3) Poměr obsahu obrazců.

### Charakteristika základní afinity

Charakteristiku přiřazujeme každé základní afinitě, která není elací. Platí

$$\kappa = (X'XX_1),$$

kde  $X_1$  je průsečík  $\overleftrightarrow{XX'}$  s nadrovinou samodružných bodů uvažované základní afinity.

### Základní afinita jako involuce

„Involutorní zobrazení“, též „involuce“, je každé zobrazení afinního bodového prostoru na sebe, které není identitou, ale složeno samo se sebou je identitě rovno.

Základní afinita je involucí tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna  $-1$ .

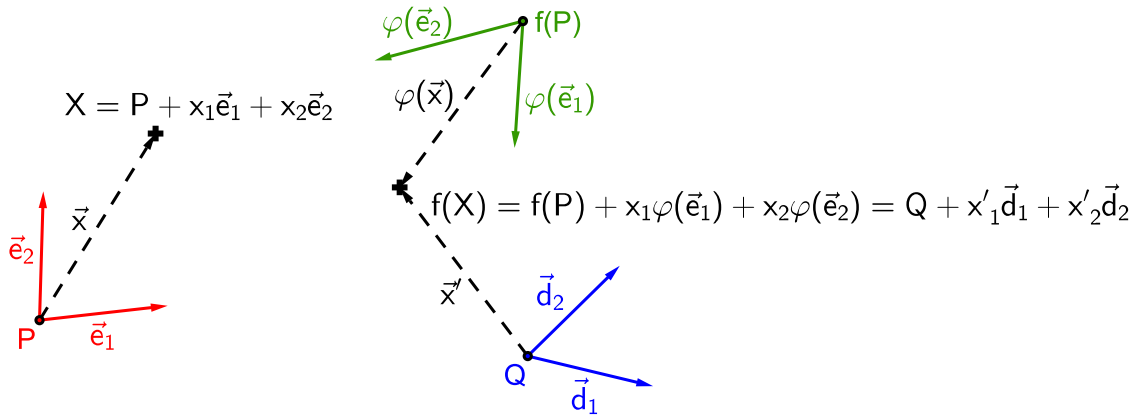
### 11.3 Cvičení – Osová afinita

1. Pomocí výsledku Příkladu 11.3 dokažte tvrzení: *Težnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru 1 : 2.*
2. Dokažte Větu 38.



## 12 Analytické vyjádření afinního zobrazení v rovině

Odvodíme si analytické vyjádření afinního zobrazení  $f$  roviny na sebe (zkráceně „afinity“ v rovině). Základní myšlenka tohoto odvození je ilustrována Obr. 38. V rovině  $A_2$  máme dvě afinní soustavy souřadnic (repéry), „soustavu vzorů“  $\alpha = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  (je určena počátkem  $P$  a bází  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  vektorového zaměření prostoru  $A_2$ ) a „soustavu obrazů“  $\omega = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  (určena počátkem  $Q$  a bází  $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  vektorového zaměření prostoru  $A_2$ ). Přitom repér  $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  se působením uvažované afinity  $f$  zobrazí na repér  $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$ , kde  $\varphi$  homomorfismus (lineární zobrazení) asociovaný k  $f$ . Obrazem bodu  $X = [x_1, x_2]$  je bod  $f(X) = X' = [x'_1, x'_2]$ . Vztah mezi souřadnicemi  $f(X)$  a  $X$  najdeme tak, že bod  $f(X)$  vyjádříme vzhledem k oběma repérům  $\{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  a  $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$  (viz Obr. 38) a tato vyjádření porovnáme.



Obrázek 38: Zobrazení bodu  $X$  v afinitě  $f$  v rovině

Nechť  $f$  je afinní zobrazení prostoru  $A_2$  na sebe a  $\varphi$  je homomorfismus asociovaný k  $f$ . Potom obrazy  $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$  vektorů báze  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\varphi(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2, \quad (40)$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2, \quad (41)$$

kde koeficienty  $a_{ij}$  jsou souřadnice vektorů  $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$  vzhledem k bázi  $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  a pro obraz  $f(P)$  počátku  $P$  repéru  $\alpha$  můžeme psát

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2, \quad (42)$$

kde  $[b_1, b_2]$  jsou jeho souřadnice vzhledem k repéru  $\omega$ .

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu  $X \in A_2$  a jeho obrazu  $X' = f(X) \in A_2$ . Nejprve každý z těchto bodů zapíšeme v příslušném repéru, bod  $X$  v repéru  $\alpha$ , bod  $f(X)$  pak v repéru  $\omega$ ,

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \quad (43)$$

$$f(X) = Q + x'_1 \vec{d}_1 + x'_2 \vec{d}_2. \quad (44)$$

Potom, s využitím vlastností zobrazení  $f$  a  $\varphi$ , zapíšeme obraz bodu  $X$  ve tvaru

$$f(X) = f(P + x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = f(P) + \varphi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = f(P) + x_1 \varphi(\vec{e}_1) + x_2 \varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (40), (41) a (42) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1 \vec{d}_1 + b_2 \vec{d}_2 + x_1(a_{11} \vec{d}_1 + a_{21} \vec{d}_2) + x_2(a_{12} \vec{d}_1 + a_{22} \vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při  $\vec{d}_i$  s vyjádřením (44) dostáváme hledané rovnice afinity  $f$  v rovině

$$\begin{aligned} f : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \quad (45)$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení  $\varphi$ . Nechť vektor  $\vec{u} \in V_2$  se zobrazí do vektoru  $\varphi(\vec{u}) \in V_2$ . Pro souřadnice vzoru  $\vec{u}$  a obrazu  $\varphi(\vec{u})$  platí

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2, \quad (46)$$

$$\varphi(\vec{u}) = u'_1 \vec{d}_1 + u'_2 \vec{d}_2. \quad (47)$$

Na (46) aplikujeme zobrazení  $\varphi$  a upravíme dle (40) a (41). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1 \varphi(\vec{e}_1) + u_2 \varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11} \vec{d}_1 + a_{21} \vec{d}_2) + u_2(a_{12} \vec{d}_1 + a_{22} \vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (47) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \quad (48)$$

Soustavu rovnic afinity v rovině (45) můžeme zapsat také pomocí matic, takto

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

stručněji pak ve tvaru

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$