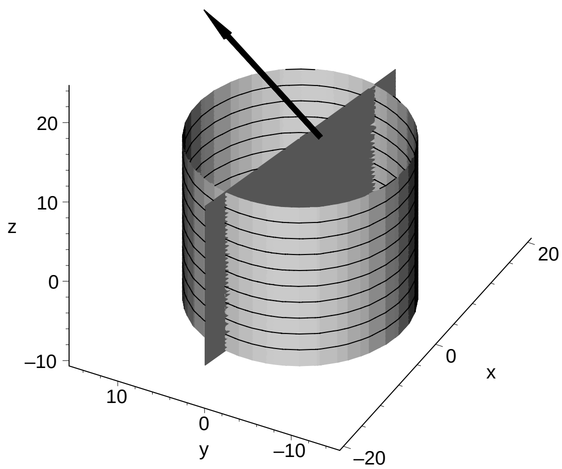


Obrázek 1.26: Průměrová rovina válcové plochy

Věta: *Je-li definována průměrová rovina sdružená s asymptotickým směrem, potom je s tímto směrem rovnoběžná.*

Důkaz: Je-li asymptotický směr dán vektorem $\mathbf{u} = (u, v, w)$, potom pro normálový vektor průměrové roviny sdružené se směrem $\mathbf{u}$

$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)x + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)y + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)z + a_{41}u + a_{42}v + a_{43}w = 0 \tag{1.80}$$

podle (1.11) platí

$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)u + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)v + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)w = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = 0. \tag{1.81}$$

Ze vztahu (1.81) plyne, že průměrová rovina (1.80) je rovnoběžná s asymptotickým směrem $\mathbf{u}$. Věta je dokázána. □

1.10 Hlavní směry

Uvažujme kvadriku

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} = 0 \tag{1.82}$$

Ke každému neasymptotickému směru $\mathbf{u} = (u, v, w)$ kvadriky (1.82) umíme podle předchozí kapitoly přiřadit průměrovou rovinu, sdruženou s tímto směrem. Rovnice této roviny je

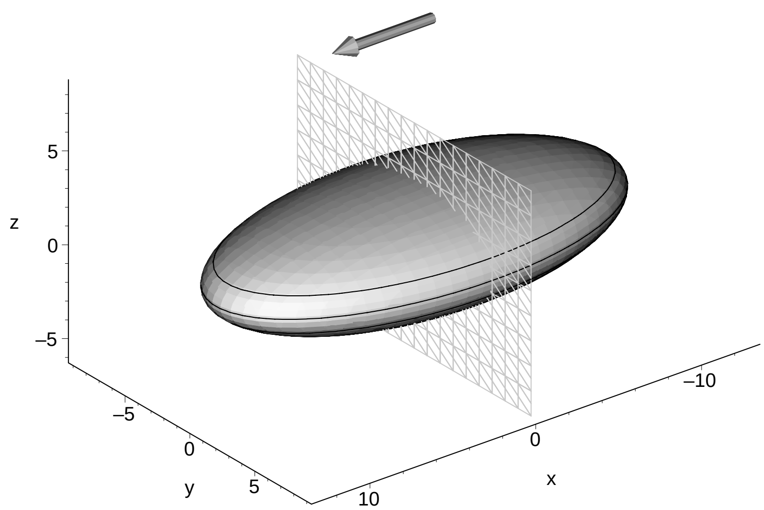
$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)x + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)y + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)z + a_{41}u + a_{42}v + a_{43}w = 0. \tag{1.83}$$

Naší snahou nyní bude najít takový směr **u**, který bude *kolmý* na průměrovou rovinu (1.83) sdruženou s tímto směrem. Takový směr nazveme směrem hlavním. Nejprve definice:

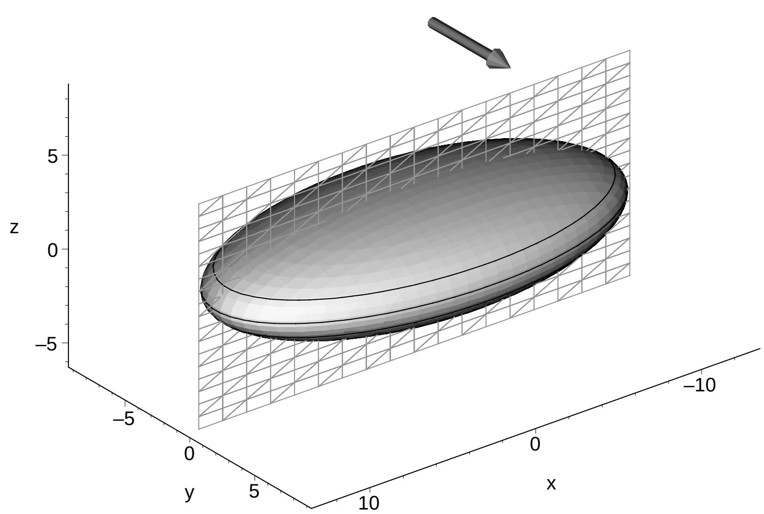
Definice: *Směr, který je kolmý k průměrové rovině s ním sdružené, se nazývá* **hlavní směr** *kvadriky.*

Příklad: Hlavní směry a hlavní roviny kvadriky

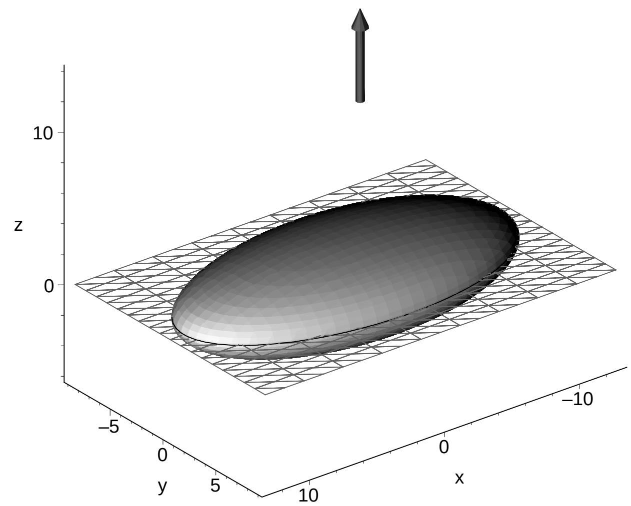
$$x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 144 = 0.$$



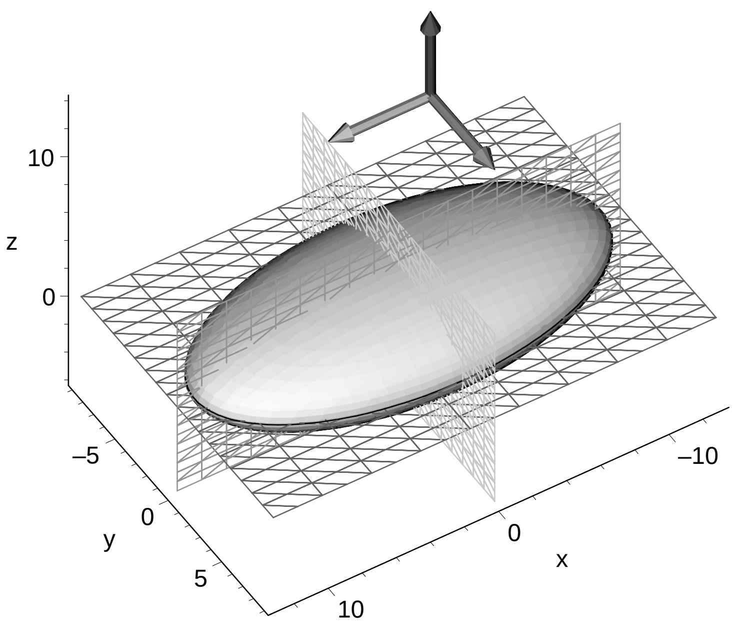
Obrázek 1.27: Hlavní směr $\vec{u} = (1, 0, 0)$



Obrázek 1.28: Hlavní směr $\vec{u} = (0, 1, 0)$



Obrázek 1.29: Hlavní směr $\vec{u} = (0, 0, 1)$



Obrázek 1.30: Hlavní roviny kvadriky $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 144 = 0$

Při hledání hlavních směrů kvadriky si uvědomíme, že normálový vektor $\mathbf{n}$ průměrové roviny (1.83) má souřadnice

$$\mathbf{n} = (a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w). \quad (1.84)$$

Vektor $\mathbf{u}$ je kolmý na rovinu (1.83) právě když $\mathbf{u}$ je kolineární s jejím normálovým vektorem $\mathbf{n}$. To nastane právě když existuje reálné číslo λ tak, že platí

$$\mathbf{n} \;=\; \lambda \mathbf{u}. \tag{1.85}$$

Rozepsáním vztahu (1.85) do souřadnic dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w &= \lambda u \\ a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w &= \lambda v \\ a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w &= \lambda w \;, \end{aligned} \tag{1.86}$$

kterou upravíme na tvar

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)u + a_{12}v + a_{13}w &= 0 \\ a_{21}u + (a_{22} - \lambda)v + a_{23}w &= 0 \\ a_{31}u + a_{32}v + (a_{33} - \lambda)w &= 0 \;. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Soustava (1.87) je homogenní soustava tří lineárních rovnic o neznámých u, v, w. Jak známo z lineární algebry, tato soustava má netriviální řešení právě když je determinant soustavy roven nule, tj. platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \;=\; 0 \;. \tag{1.88}$$

Definice: *Rovnice (1.88) se nazývá* **charakteristická rovnice** *kvadriky.*

Charakteristickou rovnici (1.88) rozepíšeme do tvaru

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - A_{44} = 0, \tag{1.89}$$

kde jsme označili

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \;, \tag{1.90}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \;. \tag{1.91}$$

Koeficienty I_1, I_2 a A_{44} v rovnici (1.89) jsou ortogonální invarianty. To znamená, že se při otočení a posunutí kartézské soustavy souřadnic jejich hodnota nezmění. Odtud plyne, že ortogonálním invariantem je celá charakteristická rovnice (1.88). Kořeny charakteristické rovnice se tedy při změně kartézské soustavy souřadnic nemění.

Obdobně je ortogonálním invariantem determinant Δ

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{1.92}$$

matice kvadriky (1.82). Determinant Δ se také nazývá *diskriminant* kvadriky.

Charakteristická rovnice (1.88) je kubická rovnice s neznámou λ, jak plyne z rozepsaného tvaru (1.89). Kořeny charakteristické rovnice nazýváme *vlastní čísla.* Vlastním číslům odpovídají *vlastní vektory.*

Při hledání hlavních směrů kvadriky (1.82) budeme postupovat následujícím způsobem.
Nejprve určíme kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ charakteristické rovnice (1.89). Každému vlastnímu číslu λ_i odpovídá vlastní vektor $\mathbf{u}_i$, který vypočítáme ze soustavy (1.87), když za λ dosadíme λ_i. Stačí nám k tomu nejvýše dvě rovnice z (1.87), protože všechny tři rovnice jsou lineárně závislé, jak plyne z podmínky (1.88). Vlastní vektory jsou hledané hlavní směry kvadriky.
Při výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů využijeme následující vlastnosti charakteristické rovnice kvadriky (1.89):

Věta:

1) *Charakteristická rovnice (1.89) je ortogonální invariant.*

2) *Rovnice (1.89) má všechny tři kořeny reálné.*

3) *Třem různým vlastním číslům odpovídají tři navzájem kolmé vlastní vektory.*

4) *Vlastnímu číslu* 0 *odpovídá asymptotický směr kvadriky.*

Důkaz:
Ad 1) Rovnici (1.88) lze napsat ve tvaru

$$|A - \lambda I| = 0, \tag{1.93}$$

kde A je matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.94}$$

a I je jednotková matice 3×3. Je-li T ortogonální matice potom podle věty o násobení determinantů

$$|TAT^{-1} - \lambda I| = |T(A - \lambda I)T^{-1}| = |A - \lambda I| \ .$$

Tvrzení je dokázáno.

Ad 2) Jak známo, kubická rovnice (1.89) má vždy alespoň jeden reálný kořen, který označíme λ_1. Číslu λ_1 odpovídá vlastní vektor $\mathbf{u}_1$. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby osa x náležela směru $\mathbf{u}_1$. Potom můžeme položit $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$. Soustava (1.87), které vyhovují souřadnice vektoru $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, má nyní tvar

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1) \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 &= 0 \\ a_{21} \cdot 1 + (a_{22} - \lambda_1) \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 &= 0 \\ a_{31} \cdot 1 + a_{32} \cdot 0 + (a_{33} - \lambda_1) \cdot 0 &= 0 \ . \end{aligned} \tag{1.95}$$

Odtud dostáváme $\lambda_1 = a_{11}$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$. Po dosazení do charakteristické rovnice (1.88) obdržíme rovnici

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \,, \tag{1.96}$$

kterou upravíme na tvar

$$(\lambda_1 - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{1.97}$$

Rovnice (1.97) má kromě reálného kořene λ_1 ještě další dva kořeny dané rovnicí

$$\begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0 \,. \tag{1.98}$$

Diskriminant rovnice (1.98)

$$(a_{22} + a_{33})^2 - 4(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)$$

lze napsat jako součet čtverců

$$(a_{22} - a_{33})^2 + 4a_{23}^2.$$

Odtud plyne, že diskriminant je větší nebo roven nule. Kvadratická rovnice (1.98) a tedy i charakteristická rovnice kvadriky (1.89) mají reálné kořeny.

Ad 3) Vlastnímu číslu λ_1 jsme přiřadili vlastní vektor $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$. Soustava (1.87) má potom, jak jsme viděli v předchozí části, tvar

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda)u \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\ (a_{22} - \lambda)v + a_{23}w &= 0 \\ a_{32}v + (a_{33} - \lambda)w &= 0 \,. \end{aligned} \tag{1.99}$$

Dosazením vlastního čísla $\lambda_2 \neq \lambda_1$ za λ do (1.95) dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)u \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\ (a_{22} - \lambda_2)v + a_{23}w &= 0 \\ a_{32}v + (a_{33} - \lambda_2)w &= 0 \,, \end{aligned} \tag{1.100}$$

Nechť vektor $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$ je řešením soustavy (1.100). Potom dosazením souřadnic do (1.100)

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot 0 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\ (a_{22} - \lambda_2) \cdot 1 + a_{23} \cdot 0 &= 0 \\ a_{32} \cdot 1 + (a_{33} - \lambda_2) \cdot 0 &= 0 \,, \end{aligned} \tag{1.101}$$

dostaneme podmínky $\lambda_2 = a_{22}$, $a_{32} = 0$.

Soustava (1.87) má potom tvar

$$\begin{array}{rcl} (\lambda_1-\lambda)u & = & 0 \\ (\lambda_2-\lambda)v & = & 0 \\ (a_{33}-\lambda)w & = & 0\,. \end{array} \tag{1.102}$$

Dosadíme-li do rovnice (1.102) za λ hodnotu $\lambda_3 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$, potom pro vektor $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$ dostaneme $\lambda_3 = a_{33}$.
Ukázali jsme, že k navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, existují tři vzájemně kolmé vlastní vektory $\mathbf{u}_1 = (1,0,0), \mathbf{u}_2 = (0,1,0), \mathbf{u}_3 = (0,0,1)$.

Ad 4) Jestliže $\lambda = 0$, potom dosazením do soustavy (1.87) dostaneme

$$\begin{array}{rcl} a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w & = & 0 \\ a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w & = & 0 \\ a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w & = & 0\,. \end{array} \tag{1.103}$$

Odtud

$a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = u(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w) + v(a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w) + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w) = 0$

a směr daný vektorem (u,v,w) je podle (1.11) asymptotický. □

Definice: *Průměrová rovina, která je kolmá ke směru, se kterým je sdružená (hlavní směr), se nazývá* **hlavní rovina** *kvadriky.* **Osa** *kvadriky je průsečnice dvou hlavních rovin (pokud existují). Průsečík kvadriky s její osou se nazývá* **vrchol** *kvadriky.*

1.11 Transformace soustavy souřadnic v E^3

Uvažujme kvadriku, jejíž rovnice v nějaké kartézské soustavě souřadnic je

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} = 0. \tag{1.104}$$

Budeme zkoumat rovnici kvadriky (1.104) při změně kartézské soustavy souřadnic na jinou kartézskou soustavu souřadnic.
Nechť kartézská soustava souřadnic (k. s. s.) je dána počátkem P a uspořádanou trojicí vzájemně ortogonálních jednotkových vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Nechť souřadnice libovolného bodu X v prostoru E^3 v této k. s. s. jsou x, y, z tj. $X = [x, y, z]$.
V jiné k. s. s., která je dána stejným počátkem P a uspořádanou trojicí vzájemně ortogonálních jednotkových vektorů $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, má tentýž bod X souřadnice $X = [x', y', z']$. Jak známo, vztah mezi "nečárkovanými" a "čárkova-