Soustava (1.87) má potom tvar

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda_1-\lambda)u & = & 0 \\
(\lambda_2-\lambda)v & = & 0 \\
(a_{33}-\lambda)w & = & 0\ .
\end{array}
\tag{1.102}
$$

Dosadíme-li do rovnice (1.102) za λ hodnotu $\lambda_3 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$, potom pro vektor $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$ dostaneme $\lambda_3 = a_{33}$.
Ukázali jsme, že k navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, existují tři vzájemně kolmé vlastní vektory $\mathbf{u}_1 = (1,0,0), \mathbf{u}_2 = (0,1,0), \mathbf{u}_3 = (0,0,1)$.

Ad 4) Jestliže $\lambda = 0$, potom dosazením do soustavy (1.87) dostaneme

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w & = & 0 \\
a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w & = & 0 \\
a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w & = & 0\ .
\end{array}
\tag{1.103}
$$

Odtud

$a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = u(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w) + v(a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w) + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w) = 0$

a směr daný vektorem (u, v, w) je podle (1.11) asymptotický. □

Definice: *Průměrová rovina, která je kolmá ke směru, se kterým je sdružená (hlavní směr), se nazývá* **hlavní rovina** *kvadriky.* **Osa** *kvadriky je průsečnice dvou hlavních rovin (pokud existují). Průsečík kvadriky s její osou se nazývá* **vrchol** *kvadriky.*

1.11 Transformace soustavy souřadnic v E^3

Uvažujme kvadriku, jejíž rovnice v nějaké kartézské soustavě souřadnic je

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} = 0. \tag{1.104}$$

Budeme zkoumat rovnici kvadriky (1.104) při změně kartézské soustavy souřadnic na jinou kartézskou soustavu souřadnic.
Nechť kartézská soustava souřadnic (k. s. s.) je dána počátkem P a uspořádanou trojicí vzájemně ortogonálních jednotkových vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Nechť souřadnice libovolného bodu X v prostoru E^3 v této k. s. s. jsou x, y, z tj. $X = [x, y, z]$.
V jiné k. s. s., která je dána stejným počátkem P a uspořádanou trojicí vzájemně ortogonálních jednotkových vektorů $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, má tentýž bod X souřadnice $X = [x', y', z']$. Jak známo, vztah mezi "nečárkovanými" a "čárkova-

nými" souřadnicemi téhož bodu je dán rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= t_{11}x' + t_{21}y' + t_{31}z' \\ y &= t_{12}x' + t_{22}y' + t_{32}z' \\ z &= t_{13}x' + t_{23}y' + t_{33}z', \end{aligned} \tag{1.105}$$

což můžeme v maticovém tvaru zapsat takto

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} . \tag{1.106}$$

Označíme-li matici (x, y, z), která je typu $(1, 3)$, písmenem $\mathbf{X}$, matici (x', y', z') písmenem $\mathbf{X}'$ a matici

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \tag{1.107}$$

písmenem $\mathbf{T}$, potom místo (1.106) můžeme psát

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{T}. \tag{1.108}$$

Matice $\mathbf{T}$ je matice přechodu od ortonormální báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ k ortonormální bázi $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$. Jak známo [4], matice $\mathbf{T}$ je ortogonální maticí, tj. platí

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{\top}. \tag{1.109}$$

Transformace (1.108) vyjadřuje změnu souřadnic bodu X při otočení soustavy souřadnic kolem společného počátku P.
Nyní posuneme otočenou k. s. s. do bodu P', jehož souřadnice v původní "nečárkované" soustavě jsou $[m, n, p]$. Potom mezi původními a "novými" souřadnicemi je vztah

$$\begin{aligned} x &= t_{11}x' + t_{21}y' + t_{31}z' + m \\ y &= t_{12}x' + t_{22}y' + t_{32}z' + n \\ z &= t_{13}x' + t_{23}y' + t_{33}z' + p \ , \end{aligned} \tag{1.110}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ m & n & p & 1 \end{pmatrix} . \tag{1.111}$$