1.12 Uvedení rovnice kvadriky na kanonický tvar

V nějaké kartézské soustavě souřadnic je dána kvadrika rovnicí

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \tag{1.112}$$

Rovnici (1.112) můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{1.113}$$

kde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{1.114}$$

je matice kvadriky (1.112). Matice $\mathbf{K}$ je symetrická, tj. $\mathbf{K} = \mathbf{K}^\top$. Označíme-li $\mathbf{X} = (x, y, z, 1)$, potom rovnici kvadriky (1.112) můžeme napsat ve tvaru

$$\mathbf{XKX}^\top = 0. \tag{1.115}$$

Při změně soustavy souřadnic na jinou kartézskou soustavu souřadnic bude mít matice kvadriky (1.112) tvar

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ m & n & p & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & m \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & n \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.116}$$

kde matice

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \tag{1.117}$$

je ortogonální matice a m, n, p jsou prozatím neurčená čísla. Matici (1.116) kvadriky (1.112) v nové soustavě souřadnic můžeme napsat ve tvaru součinu matic

$$\mathbf{TKT}^\top, \tag{1.118}$$

kde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ m & n & p & 1 \end{pmatrix} \tag{1.119}$$

je matice transformace. Naší snahou je zvolit matici transformace $\mathbf{T}$ tak, aby matice (1.118) kvadriky byla co nejjednodušší.
Nechť hlavní směry kvadriky (1.112) jsou dány jednotkovými vzájemně kolmými vektory $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$, $\mathbf{u}_3 = (u_3, v_3, w_3)$. Přitom předpokládáme, že vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ odpovídají po řadě vlastní vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Matici transformace $\mathbf{T}$ zvolme takto:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 0 \\ m & n & p & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.120}$$

kde m, n, p jsou prozatím blíže neurčené konstanty. Matice $\mathbf{T}$ tedy obsahuje v prvých třech řádcích jednotkové vlastní vzájemně kolmé vektory. Potom matice kvadriky v "nové" soustavě souřadnic má tvar

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 0 \\ m & n & p & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & m \\ v_1 & v_2 & v_3 & n \\ w_1 & w_2 & w_3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.121}$$

Vynásobením prvních dvou matic vlevo v (1.121) vzhledem k (1.86) dostaneme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_1 v_1 & \lambda_1 w_1 & a_{14}u_1 + a_{24}v_1 + a_{34}w_1 \\ \lambda_2 u_2 & \lambda_2 v_2 & \lambda_2 w_2 & a_{14}u_2 + a_{24}v_2 + a_{34}w_2 \\ \lambda_3 u_3 & \lambda_3 v_3 & \lambda_3 w_3 & a_{14}u_3 + a_{24}v_3 + a_{34}w_3 \\ K & L & M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & m \\ v_1 & v_2 & v_3 & n \\ w_1 & w_2 & w_3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.122}$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned} K &= a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}, \\ L &= a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}, \\ M &= a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}, \\ N &= a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44}. \end{aligned} \tag{1.123}$$

Nyní budeme vyšetřovat zvlášť středové kvadriky (tj. kvadriky s jediným středem) a zvlášť nestředové kvadriky.

Středový případ: $A_{44} \neq 0$

Za čísla m, n, p v matici transformace $\mathbf{T}$ zvolíme souřadnice středu kvadriky. Potom podle (1.16) platí $K = L = M = 0$. Součin matic v (1.122) dává matici

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{u}_1^2 & \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 & 0 \\ \lambda_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \lambda_2 \mathbf{u}_2^2 & \lambda_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 & 0 \\ \lambda_3 \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 & \lambda_3 \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_2 & \lambda_3 \mathbf{u}_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}, \tag{1.124}$$

kde $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$ značí skalární součin vektorů $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$. Při úpravě matice (1.124) jsme využili faktu, že tato matice je symetrická. Skutečně platí

$$(\mathbf{TKT}^\top)^\top = (\mathbf{T}^\top)^\top \mathbf{K}^\top \mathbf{T}^\top = \mathbf{TKT}^\top,$$

neboť matice $\mathbf{K}$ je symetrická (a tedy $\mathbf{K}^\top = \mathbf{K}$).
Vlastní vektory $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$, $\mathbf{u}_3 = (u_3, v_3, w_3)$ jsou jednotkové a vzájemně kolmé. Odtud plyne, že koeficienty u vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ na hlavní diagonále matice (1.124) jsou rovny jedné a skalární součiny $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$ pro $i \neq j$ jsou rovny nule.
Ještě vyjádříme výraz $N = a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44}$ na hlavní diagonále pomocí velkého determinantu Δ a hlavního minoru A_{44}. Ukážeme, že platí

$$a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44} = \frac{\Delta}{A_{44}}. \tag{1.125}$$

Řešíme-li totiž soustavu rovnic pro výpočet středu kvadriky

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} &= 0 \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} &= 0 \\ a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} &= 0 \end{aligned} \tag{1.126}$$

pomocí Cramerova pravidla, potom pro hodnoty m, n, p je

$$m = \frac{\begin{vmatrix} -a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{A_{44}}, \ n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}}{A_{44}}, \ p = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{34} \end{vmatrix}}{A_{44}}. \tag{1.127}$$

Rozvineme-li determinant Δ podle posledního řádku, potom

$$\Delta = -a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{43}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{44}A_{44}. \tag{1.128}$$

Po vydělení Δ výrazem A_{44} dostaneme ze vztahu (1.128), s použitím (1.127), tvrzení (1.125).
Na základě předcházejících úvah dostáváme konečný tvar matice (1.124) pro středové kvadriky

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{A_{44}} \end{pmatrix}. \tag{1.129}$$

Matici (1.129) odpovídá v maticovém vyjádření kvadrika

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{A_{44}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,, \tag{1.130}$$

jejíž kanonický tvar je

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0 \,. \tag{1.131}$$

Nyní budeme vyšetřovat nestředové kvadriky.

Nestředový případ: $A_{44} = 0$.

Pokud kvadrika střed nemá nebo má nekonečně mnoho středů, potom je determinant A_{44} soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} &= 0 \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} &= 0 \\ a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} &= 0 \end{aligned} \tag{1.132}$$

roven nule. Protože $A_{44} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, znamená to, že alespoň jedno z vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ je rovno nule. Budeme předpokládat, že $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$.[1]

Součin matic (1.122) má tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_1 v_1 & \lambda_1 w_1 & a_{14}u_1 + a_{24}v_1 + a_{34}w_1 \\ \lambda_2 u_2 & \lambda_2 v_2 & \lambda_2 w_2 & a_{14}u_2 + a_{24}v_2 + a_{34}w_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_{14}u_3 + a_{24}v_3 + a_{34}w_3 \\ K & L & M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & m \\ v_1 & v_2 & v_3 & n \\ w_1 & w_2 & w_3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{1.133}$$

kde K, L, M, N jsou výrazy

$$\begin{aligned} K &= a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}, \\ L &= a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}, \\ M &= a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}, \\ N &= a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44}. \end{aligned} \tag{1.134}$$

Vynásobením matic v (1.133), s využitím faktu, že vlastní vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_3$ jsou vzájemně kolmé a jednotkové, dostaneme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & E \\ 0 & \lambda_2 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & G \\ E & F & G & H \end{pmatrix} , \tag{1.135}$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned} E &= Ku_1 + Lv_1 + Mw_1, \\ F &= Ku_2 + Lv_2 + Mw_2, \\ G &= Ku_3 + Lv_3 + Mw_3 \; = \; a_{14}u_3 + a_{24}v_3 + a_{34}w_3, \\ H &= Km + Ln + Mp + N. \end{aligned} \tag{1.136}$$

[1]Případy, kdy $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ jsou uvedeny v další kapitole.

Jako v případě středové kvadriky, opět jsme využili faktu, že matice (1.135) je symetrická.

Nyní určíme konstanty m, n, p v (1.134).
Nechť bod $M = [m, n, p]$ leží v hlavní rovině

$$(a_{11}u_1 + a_{12}v_1 + a_{13}w_1)x + (a_{21}u_1 + a_{22}v_1 + a_{23}w_1)y + (a_{31}u_1 + a_{32}v_1 + a_{33}w_1)z + a_{41}u_1 + a_{42}v_1 + a_{43}w_1 = 0, \tag{1.137}$$

která přísluší nenulovému vlastnímu číslu λ_1, a je tedy kolmá na hlavní směr $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$. Potom je výraz $E = Ku_1 + Lv_1 + Mw_1$ v matici (1.135) roven nule, jak lze zjistit dosazením m, n, p za x, y, z do (1.137).
Nechť bod M leží ještě v hlavní rovině

$$(a_{11}u_2 + a_{12}v_2 + a_{13}w_2)x + (a_{21}u_2 + a_{22}v_2 + a_{23}w_2)y + (a_{31}u_2 + a_{32}v_2 + a_{33}w_2)z + a_{41}u_2 + a_{42}v_2 + a_{43}w_2 = 0, \tag{1.138}$$

která přísluší nenulovému vlastnímu číslu λ_2, a která je kolmá na hlavní směr $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$. Potom je i výraz $F = Ku_2 + Lv_2 + Mw_2$ v matici (1.135) roven nule. Bod M náleží průniku dvou hlavních rovin, tedy podle definice leží na ose kvadriky, která náleží asymptotickému směru.
Po této volbě má matice kvadriky tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & H \end{pmatrix}, \tag{1.139}$$

Nyní naše úvahy rozdělíme.

a) Pokud soustavě (1.132) pro určení středu vyhovuje *přímka středů,* potom $K = L = M = 0$ a odtud podle (1.136) plyne $G = 0$. Platí také obráceně: pokud $G = 0$ (a $E = F = 0$), potom $K = L = M = 0$, neboť soustava

$$\begin{aligned} Ku_1 + Lv_1 + Mw_1 = 0, \\ Ku_2 + Lv_2 + Mw_2 = 0, \\ Ku_3 + Lv_3 + Mw_3 = 0, \end{aligned} \tag{1.140}$$

má pro navzájem kolmé nenulové vlastní vektory (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) pouze triviální řešení $K = L = M = 0$.
Protože $H = Km + Ln + Mp + N$, potom má matice kvadriky vzhledem k podmínkám $K = L = M = 0$ tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}. \tag{1.141}$$

Hodnotu N určíme dosazením souřadnic *libovolného* bodu $M = [m, n, p]$ osy do rovnice (1.112). Je totiž

$Km + Ln + Mp + N =$
$(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14})m + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24})n + (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34})p + a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44} =$
$a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}mp + 2a_{23}np + 2a_{14} + 2a_{24}n + 2a_{34}p + a_{44} = f(m, n, p)$.

Jestliže $f(m, n, p) = N \neq 0$, potom je kvadrika eliptickou nebo hyperbolickou válcovou plochou (viz dále). Kanonický tvar válcové plochy je podle (1.141)

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + N \;=\; 0 \,, \tag{1.142}$$

kde $N \neq 0$.[2]
Pokud je $f(m, n, p) = N = 0$, potom přímka středů náleží kvadrice a je tedy přímkou singulárních bodů. V tomto případě se jedná o dvě různoběžné roviny.

b) Jestliže $G \neq 0$ v (1.139), potom je alespoň jeden z výrazů K, L, M různý od nuly a podle (1.132) kvadrika nemá *žádný* střed.
Diskriminant $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 G^2 \neq 0$ — kvadrika je v tomto případě regulární. Jedná se o kvadriku, která se nazývá paraboloid.
Volbou bodu $M = [m, n, p]$ ve vrcholu, tj. v průsečíku osy kvadriky, která je dána průsečnicí hlavních rovin (1.137), (1.138) s kvadrikou, dostaneme $H = Km + Ln + Mp + N = f(m, n, p) = 0$ a matice kvadriky má tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix} . \tag{1.143}$$

Výsledná rovnice paraboloidu v maticovém tvaru je

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; 0 \,, \tag{1.144}$$

kde $G = a_{14}u_3 + a_{24}v_3 + a_{34}w_3$, jejíž kanonický tvar je

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2Gz' \;=\; 0 \,. \tag{1.145}$$

[2] Obdobným způsobem zjistíme, že parabolická válcová plocha má kanonickou rovnici $\lambda_1 x'^2 + 2Fy' = 0$.