1.13 Klasifikace kvadrik

V této části provedeme klasifikaci kvadrik. Vyšetříme všechny případy, které mohou různou volbou koeficientů v rovnici kvadriky

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{1.146}$$

nastat.
Kvadriky budeme klasifikovat jednak podle toho, zda se jedná o regulární ($\Delta \neq 0$) nebo singulární ($\Delta = 0$) kvadriky, jednak podle toho, zda jsou středové ($A_{44} \neq 0$) nebo nestředové ($A_{44} = 0$). Všechny kvadriky tak rozdělíme do čtyř následujících skupin:

I) středové regulární kvadriky: $A_{44} \neq 0$, $\Delta \neq 0$

II) středové singulární kvadriky: $A_{44} \neq 0$, $\Delta = 0$

III) nestředové regulární kvadriky: $A_{44} = 0$, $\Delta \neq 0$

IV) nestředové singulární kvadriky: $A_{44} = 0$, $\Delta = 0$.

I) **Středové regulární kvadriky:** $A_{44} \neq 0$, $\Delta \neq 0$

Předpokládejme, že $A_{44} \neq 0$, $\Delta \neq 0$. Každou středovou kvadriku lze podle (1.131) převést vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic na kanonický tvar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{A_{44}} \;=\; 0\;, \tag{1.147}$$

který můžeme reprezentovat zápisem v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{A_{44}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; 0\;. \tag{1.148}$$

Z předchozí kapitoly víme, že determinant kvadriky Δ je ortogonální invariant, tedy jeho hodnota se při změně kartézské soustavy souřadnic nemění. Rovněž tak je ortogonálním invariantem determinant A_{44}. Z předpokladu $A_{44} \neq 0$ plyne, že $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Je totiž $A_{44} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Předpokládejme nejprve, že všechna vlastní čísla *mají stejná znaménka.* O takových kvadrikách říkáme, že jsou *eliptického typu.* Stačí se omezit na kladná vlastní čísla — v opačném případě rovnici (1.147) vynásobíme číslem minus jedna.
Nechť $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$.

Je-li $\Delta/A_{44} < 0$, potom po vydělení rovnice (1.147) výrazem $-\Delta/A_{44}$ dostaneme kvadriku, jejíž kanonický tvar je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1.149}$$

Zde jsme označili $a^2 = -\Delta/(\lambda_1 A_{44})$, $b^2 = -\Delta/(\lambda_2 A_{44})$, $c^2 = -\Delta/(\lambda_3 A_{44})$.

Plocha o rovnici (1.149) se nazývá *trojosý elipsoid.*

Pro $\Delta/A_{44} > 0$ dostaneme analogicky rovnici kvadriky

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{1.150}$$

která se nazývá *imaginární elipsoid.* Tato kvadrika zřejmě neobsahuje žádné (reálné) body.

Nyní budeme zkoumat středové regulární kvadriky, jejichž vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *nemají stejná znaménka.* Takové kvadriky nazýváme kvadriky *hyperbolického typu.*
Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$.

Jestliže $\Delta/A_{44} > 0$, potom po vydělení rovnice (1.147) výrazem Δ/A_{44} dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{1.151}$$

kde jsme označili $a^2 = \Delta/(\lambda_1 A_{44})$, $b^2 = \Delta/(\lambda_2 A_{44})$, $c^2 = \Delta/(\lambda_3 A_{44})$.

Kvadrika o rovnici (1.151) se nazývá *dvojdílný hyperboloid.*

Pokud $\Delta/A_{44} < 0$, potom po vydělení rovnice (1.147) výrazem $-\Delta/A_{44}$ dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1.152}$$

kde jsme označili $a^2 = -\Delta/(\lambda_1 A_{44})$, $b^2 = -\Delta/(\lambda_2 A_{44})$, $c^2 = -\Delta/(\lambda_3 A_{44})$.

Plocha, daná rovnicí (1.152), se nazývá *jednodílný hyperboloid.*

II) **Středové singulární kvadriky:** $A_{44} \neq 0$, $\Delta = 0$

Nechť středová kvadrika není regulární, tj. $\Delta = 0, A_{44} \neq 0$.

Nejprve předpokládejme, že vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mají stejná znaménka. Potom dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{1.153}$$

které zřejmě vyhovuje jediný reálný bod $[0, 0, 0]$. Tato kvadrika se nazývá *imaginární kuželová plocha.*

Nyní uvažujme singulární středovou kvadriku, jejíž vlastní čísla nemají stejná znaménka. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$.
V tomto případě dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{1.154}$$

Kvadriku, která má rovnici (1.154), nazýváme *kuželová plocha.*

III) **Nestředové regulární kvadriky:** $A_{44} = 0, \Delta \neq 0$

V této části budeme studovat nestředové regulární kvadriky, tj. takové kvadriky, pro které platí $A_{44} = 0, \Delta \neq 0$. Tyto kvadriky se nazývají *paraboloidy.*

Z předcházející kapitoly víme, že nestředovou regulární kvadriku, pro jejíž vlastní čísla platí $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ a $\lambda_3 = 0$, lze převést vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic na kanonický tvar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2Gz \ = \ 0 \ , \tag{1.155}$$

kde $G = a_{14}u_3 + a_{24}v_3 + a_{34}w_3$ je různé od nuly, jak plyne z determinantu Δ matice kvadriky

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 G^2. \tag{1.156}$$

Nechť mají vlastní čísla λ_1, λ_2 *stejná* znaménka (a $\lambda_3 = 0$). Můžeme se omezit na případ, že platí $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (v opačném případě vynásobíme rovnici (1.155) číslem minus jedna). Je-li $G < 0$, potom můžeme rovnici (1.155) upravit na tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ = \ 2z \ , \tag{1.157}$$

kde jsme označili $a^2 = -G/\lambda_1$, $b^2 = -G/\lambda_2$.
Je-li $G > 0$, potom dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ = \ -2z \ , \tag{1.158}$$

kde $a^2 = G/\lambda_1$, $b^2 = G/\lambda_2$. Rovnice (1.157), (1.158) jsou rovnicemi *eliptického paraboloidu.*

Nechť mají vlastní čísla λ_1, λ_2 *různá* znaménka (a $\lambda_3 = 0$). Můžeme předpokládat, že $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Jestliže $G < 0$, potom z (1.155) dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \ = \ 2z \ , \tag{1.159}$$

kde $a^2 = -G/\lambda_1$, $b^2 = -G/\lambda_2$.
Analogicky, pro $G > 0$ dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \ = \ -2z \ . \tag{1.160}$$

Rovnice (1.159) a (1.160) jsou rovnicemi *hyperbolického paraboloidu.*

IV) **Nestředové singulární kvadriky:** $A_{44} = 0, \Delta = 0$

V této části vyšetříme kvadriky, které jsou nestředové a singulární, tj. takové, pro které platí $A_{44} = 0, \Delta = 0$.

IVa) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$.

Nejprve předpokládejme, že pro vlastní čísla platí $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Potom nutně, díky podmínce $\Delta = 0$, musí být v matici v (1.156) $G = 0$. Uvažujme matici kvadriky ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}. \tag{1.161}$$

Je-li $k \neq 0$, potom má matice kvadriky (1.161) hodnost tři a kvadrika je *válcovou plochou.*
Předpokládejme, že vlastní čísla mají stejná znaménka. Opět můžeme předpokládat, bez újmy na obecnosti, že $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.
Je-li $k < 0$, potom rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1, \tag{1.162}$$

kde $a^2 = -k/\lambda_1$, $b^2 = -k/\lambda_2$, je rovnicí *eliptické válcové plochy.*
Je-li $k > 0$, potom rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; -1, \tag{1.163}$$

kde $a^2 = k/\lambda_1$, $b^2 = k/\lambda_2$, je rovnicí *imaginární eliptické válcové plochy.*

Mají-li vlastní čísla λ_1, λ_2 různá znaménka (a $k \neq 0$), potom dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1, \tag{1.164}$$

která je rovnicí *hyperbolické válcové plochy.*

Je-li $k = 0$, potom matice (1.161) má pro $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ hodnost dvě. Rozlišíme dva případy:
Mají-li λ_1, λ_2 stejná znaménka, potom rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 0 \tag{1.165}$$

je rovnicí *přímky,* neboť rovnici (1.165) vyhovuje každý bod o souřadnicích $[0, 0, z]$ a žádný jiný. Říkáme též, že rovnice (1.165) je rovnicí *imaginárních různoběžných rovin*, které se protínají v reálné přímce.
Mají-li λ_1, λ_2 různá znaménka, potom rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \;=\; 0 \tag{1.166}$$

je rovnicí *dvou různoběžných rovin,* jak můžeme nahlédnout z rozkladu

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = 0.$$

IVb) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0.$

Nyní budeme předpokládat, že jediné vlastní číslo kvadriky (1.146) je různé od nuly. Můžeme položit $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0.$

Nechť $k \neq 0$. Potom matice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \tag{1.167}$$

vede, v případě, že $k\lambda_1 < 0$, na rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{1.168}$$

která je rovnicí *dvou rovnoběžných rovin,* jak můžeme vidět z rozkladu

$$\left(\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x}{a}-1\right) = 0.$$

Jestliže $k\lambda_1 > 0$, potom rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} = -1 \tag{1.169}$$

je rovnice *imaginárních rovnoběžných rovin.*

Nechť $k = 0$. Potom matice (1.167) obsahuje jediný nenulový prvek λ_1 a její hodnost je tedy rovna jedné. Tento případ vede na rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} = 0, \tag{1.170}$$

která je rovnicí *dvojnásobné roviny.*

Zbývá vyšetřit případ, kdy matice kvadriky má tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.171}$$

pro $k \neq 0$. Potom hodnost matice (1.171) je tři.
Je-li $k\lambda_1 < 0$, vede matice (1.171) na rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} = 2kz, \tag{1.172}$$

jestliže $k\lambda_1 > 0$, dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} = -2kz\ . \tag{1.173}$$

Plocha o rovnicích (1.172), (1.173) se nazývá *parabolická válcová plocha.*

Vyšetřili jsme všechny případy kvadriky (1.146), které mohou nastat. Klasifikace kvadrik je tímto provedena.

Příklad 1:
Vyšetřete kvadriku [2], [5]

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 22x + 24y + 2z + 30 = 0. \tag{1.174}$$

Řešení: Nejprve vypočteme diskriminant Δ kvadriky (1.174) buď rozvinutím podle některého řádku nebo sloupce nebo použijeme služeb některého matematického software. Vyjde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & -11 \\ -2 & 6 & -2 & 12 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ -11 & 12 & 1 & 30 \end{vmatrix} = -2^2 \cdot 3^5. \tag{1.175}$$

Diskriminant je různý od nuly, tedy se jedná o regulární kvadriku.
Hodnota A_{44} je rovna

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3^4. \tag{1.176}$$

Determinant A_{44} je různý od nuly, proto se jedná o středovou kvadriku.
Nyní vyřešíme charakteristickou rovnici kvadriky

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1.177}$$

kterou můžeme napsat ve tvaru

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0. \tag{1.178}$$

Kořeny charakteristické rovnice (1.178) najdeme buď pomocí některého matematického programu (Derive, Maple, Mathematica,...) nebo se snažíme alespoň jeden kořen (1.178) uhodnout. V tomto případě uhodneme kořen 3. Zbývající kořeny dostaneme tak, že rovnici (1.178) vydělíme faktorem $\lambda - 3$, čímž snížíme stupeň rovnice na 2. Zbylou kvadratickou rovnici řešíme známým způsobem. Dostaneme tak kořeny $3, 6, 9$.

Vlastní čísla označíme např. takto:

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 9.$$

Ještě vypočteme hodnotu

$$\frac{\Delta}{A_{44}} = \frac{-2^2 \cdot 3^5}{2 \cdot 3^4} = -2^4 \cdot 3 = -6,$$

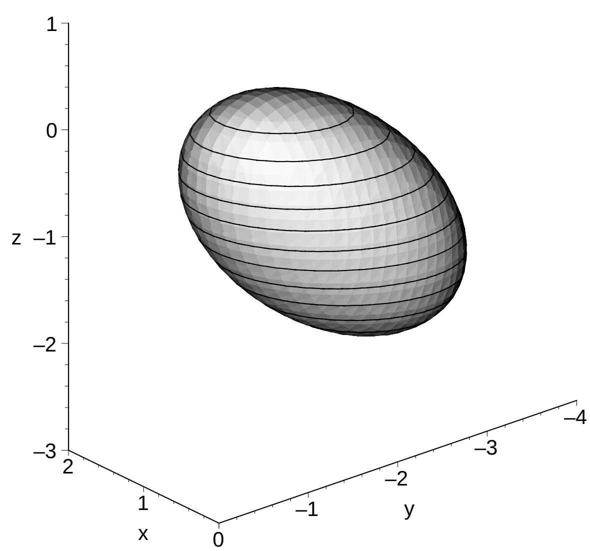
kterou budeme potřebovat při vyjádření kanonického tvaru kvadriky. Podle (1.131) má kanonická rovnice kvadriky (1.174) tvar[3]

$$3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 6 = 0. \tag{1.179}$$

Tuto rovnici ještě upravíme podle (1.149) na tvar

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{\frac{2}{3}} = 1, \tag{1.180}$$

ze kterého budeme vidět délky poloos. Podle (1.180) se jedná o trojosý elipsoid (viz obrázek 3.4) s délkami poloos $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = \sqrt{\frac{2}{3}}$.



Obrázek 1.31: Trojosý elipsoid

Nyní vyšetříme polohu kvadriky (1.174) v původní kartézské soustavě souřadnic.

[3]Ve vyjádření (1.179) uvádíme kvůli zjednodušení místo "čárkovaných" proměnných x', y', z' proměnné x, y, z "bez čárek".

Protože se jedná o středovou kvadriku, vypočítáme střed $S = [m, n, p]$, pro který podle (1.16) platí:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 7m & - & 2n & + & & - & 11 & = & 0 \\ -2m & + & 6n & - & 2p & + & 12 & = & 0 \\ & - & 2n & + & 5p & + & 1 & = & 0. \end{array} \tag{1.181}$$

Řešením soustavy je trojice $m = 1$, $n = -2$, $p = -1$, tedy $S = [1, -2, -1]$. Hlavní směry zjistíme vyjádřením vlastních vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, které po řadě přísluší vlastním číslům λ_1, λ_2, λ_3. Pro $\lambda_1 = 3$ řešíme podle (1.87) soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4u & - & 2v & & & = & 0 \\ -2u & + & 3v & - & 2w & = & 0 \\ & - & 2v & + & 2w & = & 0\ , \end{array} \tag{1.182}$$

které vyhovuje vlastní vektor $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 2)$. Dále pro $\lambda_2 = 6$ dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & - & 2v & & & = & 0 \\ -2u & + & & - & 2w & = & 0 \\ & - & 2v & - & w & = & 0\ , \end{array} \tag{1.183}$$

která dává řešení $\mathbf{u}_2 = (2, 1, -2)$. Podobně získáme i souřadnice třetího vlastní vektoru, pro který platí $\mathbf{u}_3 = (-2, 2, -1)$. Pomocí skalárního součinu snadno ověříme, že vlastní vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, jsou vzájemně kolmé.

Hlavní směry, dané vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, společně se středem S určují hledanou polohu kvadriky (1.174) v původní kartézské soustavě souřadnic. Rovnice os a souřadnice vrcholů určovat nebudeme. □

Příklad 2:
Vyšetřete kvadriku

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0. \tag{1.184}$$

Řešení: Pro diskriminant Δ platí

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 16, \tag{1.185}$$

tedy se jedná o regulární kvadriku.
Pro determinant A_{44} dostaneme

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.186}$$

což znamená, že kvadrika (1.184) je nestředová regulární — tedy se jedná o paraboloid.
Určíme kanonickou rovnici (1.184) a hlavní směry. Nejprve vypočítáme kořeny charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1.187}$$

která má v rozepsaném stavu tvar

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0, \tag{1.188}$$

tj.

$$\lambda(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = \lambda(\lambda - 7)(\lambda + 2) = 0.$$

Odtud určíme vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 0.$$

Nyní najdeme hlavní směry kvadriky. Ty, jak známo, určují vlastní vektory, které jsou přiřazené vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 7$ odpovídá soustava

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2u & + & 2v & + & 3w & = & 0 \\ 2u & - & 8v & & & = & 0 \\ 3u & & & - & 6w & = & 0\ , \end{array} \tag{1.189}$$

jejíž řešením je vlastní vektor $\mathbf{u}_1 = (4, 1, 2)$.
Obdobně vlastnímu číslu $\lambda_2 = -2$ odpovídá soustava

$$\begin{array}{rcrcrcl} 7u & + & 2v & + & 3w & = & 0 \\ 2u & + & v & & & = & 0 \\ 3u & & & + & 3w & = & 0\ , \end{array} \tag{1.190}$$

jejímž řešením je vlastní vektor $\mathbf{u}_2 = (1, -2, -1)$.
Konečně hodnotě $\lambda_3 = 0$ odpovídá řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5u & + & 2v & + & 3w & = & 0 \\ 2u & - & v & & & = & 0 \\ 3u & & & + & w & = & 0\ , \end{array} \tag{1.191}$$

kterým je vlastní vektor $\mathbf{u_3} = (1, 2, -3)$, který určuje asymptotický směr kvadriky. Pro kanonickou rovnici kvadriky budeme ještě potřebovat normovaný vektor směru, který je určený vektorem $\mathbf{u_3}$. Snadno zjistíme, že takový vektor má souřadnice

$$\frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right). \tag{1.192}$$

Matice kanonické rovnice (1.184) je podle (1.143) ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 + 2v_3 + 3w_3 \\ 0 & 0 & u_3 + 2v_3 + 3w_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.193}$$

kde u_3, v_3, w_3 jsou souřadnice vektoru $\frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|} = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}})$. Hodnota výrazu $u_3 + 2v_3 + 3w_3$ v (1.193) je

$$u_3 + 2v_3 + 3w_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{4}{\sqrt{14}} - \frac{9}{\sqrt{14}} = -\frac{4}{\sqrt{14}}.$$

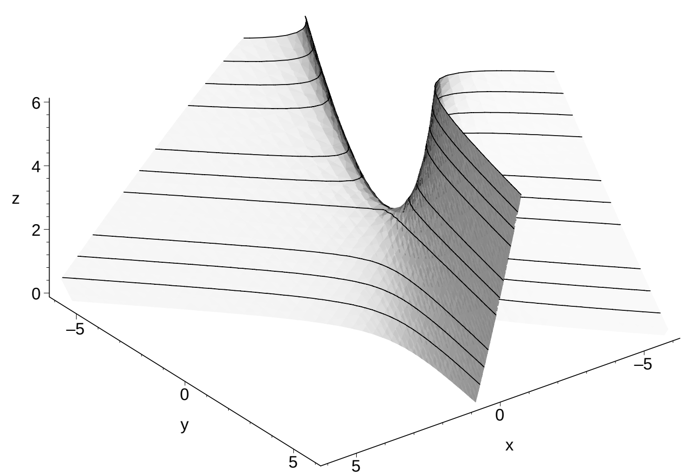
Dosazením do (1.193) dostaneme

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.194}$$

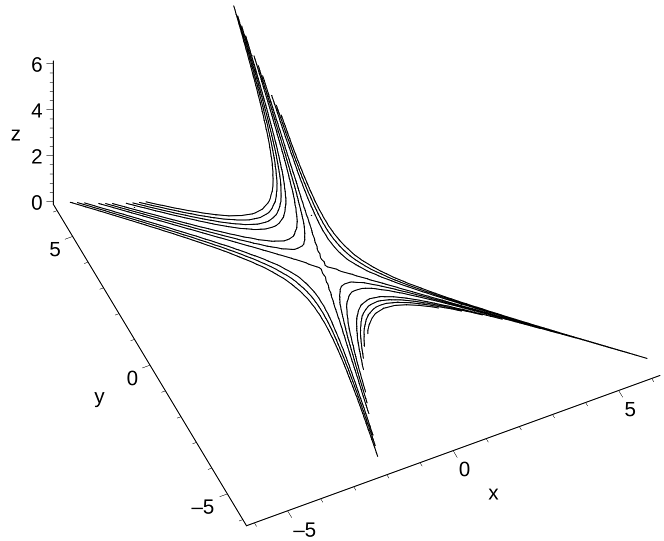
a odtud kanonickou rovnici (1.184)

$$7x^2 - 2y^2 - \frac{8}{\sqrt{14}} = 0. \tag{1.195}$$

Kvadrika je tedy hyperbolický paraboloid (viz obrázky 1.32 a 1.33).



Obrázek 1.32: Hyperbolický paraboloid (Pohled 1)



Obrázek 1.33: Hyperbolický paraboloid (Pohled 2)

Nyní vyhledáme hlavní roviny, osu a vrchol paraboloidu.
Hlavnímu směru, určenému vlastním vektorem $\mathbf{u}_1 = (4, 1, 2)$, odpovídá průměrová rovina, která je něj kolmá, a která se nazývá hlavní rovina. Hlavní rovina má podle (1.73) rovnici

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0\ , \tag{1.196}$$

tj.

$$28x + 7y + 14z + 12 = 0. \tag{1.197}$$

Pro hlavní rovinu, sdruženou s hlavním směrem daným vlastním vektorem $\mathbf{u}_2 = (1, -2, -1)$, podobným způsobem dostaneme

$$x - 2y - z + 3 = 0. \tag{1.198}$$

Průnik hlavních rovin (1.197), (1.198) dává osu paraboloidu. Průnik osy paraboloidu s paraboloidem je vrchol V. Určíme jej jako společné řešení rovnic (1.184), (1.197), (1.198). S použitím počítače dostaneme

$$V = \Big[-\frac{617}{392}, -\frac{113}{196}, \frac{1011}{392}\Big].$$

□

Příklad 3:
Vyšetřete kvadriku

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4\sqrt{2}xy + 2yz + 6x + 2y(2\sqrt{2} - 1) - 6z - 9 = 0. \tag{1.199}$$

Řešení: Diskriminant kvadriky Δ je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & 0 & 3 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 1 & 2\sqrt{2}-1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2\sqrt{2}-1 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.200}$$

Diskriminant je roven nule, tedy se jedná o singulární kvadriku.
Hodnota A_{44} je rovna

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.201}$$

Determinant A_{44} je roven nule — jedná se o nestředovou kvadriku.
Řešením soustavy rovnic (1.16) pro určení středu kvadriky

$$\begin{array}{cccccccc} 3m & - & 2\sqrt{2}n & & & +3 & = & 0 \\ 2\sqrt{2}m & + & 3n & + & p & -1-\sqrt{2} & = & 0 \\ & & n & + & 3p & -3 & = & 0 \end{array} \tag{1.202}$$

je přímka středů o rovnici

$$m = -2\sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2}t,\ n = 3 - 3t,\ p = t \tag{1.203}$$

která je osou kvadriky. Směr osy, daný vektorem o souřadnicích

$$(2\sqrt{2}, -3, 1), \tag{1.204}$$

je asymptotickým směrem kvadriky, což snadno můžeme ověřit, řešíme-li rovnici (1.205) pro asymptotické směry

$$3u^2 + 3v^2 + 3w^2 + 4\sqrt{2}uv + 2vw = 0. \tag{1.205}$$

Rovnici (1.205) upravíme na tvar

$$\left(\frac{u}{v} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{w}{v} + \frac{1}{3}\right)^2 = 0, \tag{1.206}$$

ze kterého plyne (1.204).
Vyšetříme charakteristickou rovnici

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1.207}$$

tj.

$$\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0. \tag{1.208}$$

Řešením rovnice jsou vlastní čísla

$$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0, \tag{1.209}$$

kterým po řadě odpovídají hlavní směry

$$\mathbf{u}_1 = (\sqrt{2}, 0, -4), \ \mathbf{u}_2 = (3\sqrt{2}, 3, 1), \ \mathbf{u}_3 = (2\sqrt{2}, -3, 1). \tag{1.210}$$

Z vyjádření (1.210) vidíme, že směr, daný vektorem $\mathbf{u}_3$, který odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_3 = 0$, je asymptotický v souladu s (1.204).
Výraz $G = a_{14}u_3 + a_{24}v_3 + a_{34}w_3$ je roven nule, jak se můžeme přesvědčit přímým dosazením. Zde ovšem u_3, v_3, w_3 jsou souřadnice normovaného vektoru $\frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|}$. Je

$$\frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \left(2\sqrt{2}, -3, 1\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

Potom skutečně

$$a_{14}u_3 + a_{24}v_3 + a_{34}w_3 = 3 \cdot \frac{2}{3} - (2\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} = 0.$$

Zbývá zjistit hodnotu výrazu $H = Km + Ln + Mp + N$, kde $M = [m, n, p]$ je libovolný bod osy. Z její rovnice (1.203) dosazením za parametr např. $t = 1$ vychází bod $X = [-1, 0, 1]$. Protože $K = L = M = 0$, je $H = N$ a platí

$$N = a_{14}m + a_{24}n + a_{34}p + a_{44} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (2\sqrt{2} - 1) + 1 \cdot (-3) - 9 = -15.$$

Matice kvadriky (1.199) je

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}, \tag{1.211}$$

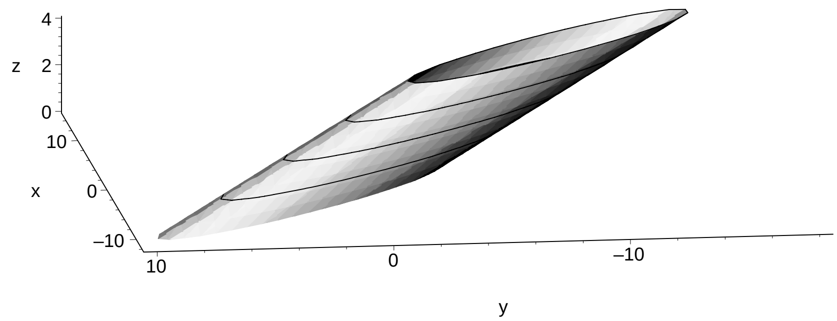
a kanonická rovnice je ve tvaru

$$3x^2 + 6y^2 - 15 = 0, \tag{1.212}$$

tj. po vydělení

$$x^2 + 2y^2 - 5 = 0 \ . \tag{1.213}$$

Jedná se o eliptickou válcovou plochu (viz obrázek 1.34), jejíž řez rovinou kolmou na osu je elipsa (1.213). □



Obrázek 1.34: Eliptická válcová plocha

Příklad 4:
Vyšetřete kvadriku

$$8x^2 - 8y^2 - 3z^2 - 12xy + 10xz + 10yz - 2x + 14y - 10z - 3 = 0 \quad (1.214)$$

Řešení: Pro diskriminant Δ kvadriky (1.214) je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 5 & -1 \\ -6 & -8 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & -3 & -5 \\ -1 & 7 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0\ . \quad (1.215)$$

Diskriminant je roven nule, tedy se jedná o singulární kvadriku.
Hodnota A_{44} je rovna

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 5 \\ -6 & -8 & 5 \\ 5 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.216)$$

Determinant A_{44} je roven nule — jedná se tedy o nestředovou singulární kvadriku.
Charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 5 \\ -6 & -8-\lambda & 5 \\ 5 & 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.217)$$

která má v rozepsaném stavu tvar

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 150\lambda = 0, \quad (1.218)$$

má kořeny

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{609}}{2} - \frac{3}{2},\ \lambda_2 = -\frac{\sqrt{609}}{2} - \frac{3}{2},\ \lambda_3 = 0. \quad (1.219)$$

Dvě vlastní čísla λ_1 a λ_2 jsou různá od nuly, v úvahu tedy přicházejí eliptická nebo hyperbolická válcová plocha nebo dvojice různoběžných rovin.

Soustava rovnic pro určení středu (1.132) má v našem případě tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 8m & - & 6n & + & 5p & & -1 & = & 0 \\ -6m & - & 8n & + & 5p & & +7 & = & 0 \\ 5m & + & 5n & - & 3p & & -5 & = & 0\,. \end{array} \tag{1.220}$$

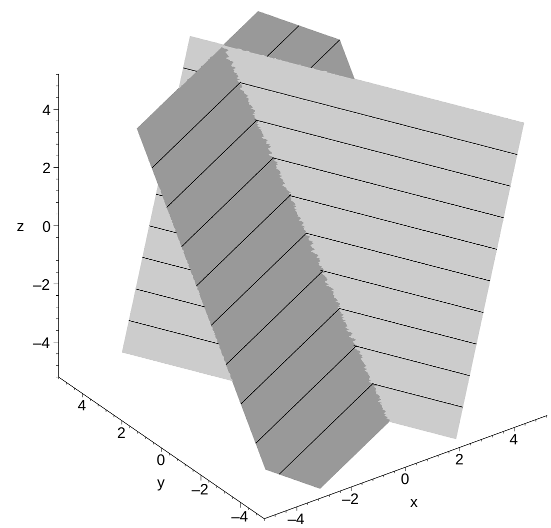
Jejím řešením je přímka středů o rovnici

$$m = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}t,\ n = \frac{1}{2} + \frac{7}{10}t,\ p = t\ . \tag{1.221}$$

Nyní určíme, zda přímka středů (1.221) náleží kvadrice. Podle (1.134) dosadíme souřadnice přímky (1.221) do rovnice

$$-m + 7n - 5p - 3 = 0 \tag{1.222}$$

a zjistíme, že pro všechny body přímky (1.221) je rovnice (1.222) splněna. Tedy se jedná o přímku singulárních bodů a kvadrika je dvojicí různoběžných rovin (viz obrázek 1.35).



Obrázek 1.35: Dvojice různoběžných rovin

K tomu, abychom určili rovnice obou rovin v původní soustavě souřadnic, stačí najít jeden bod každé z obou rovin, který neleží na jejich společné průsečnici (1.221).
Dosazením za $x = 0$ $y = 0$ do rovnice (1.214) získáme rovnici

$$3z^2 + 10z + 3 = 0,$$

která má řešení $z_1 = -3$ a $z_2 = -\frac{1}{3}$. Každý z bodů o souřadnicích $[0, 0, -3]$ a $[0, 0, -\frac{1}{3}]$ leží jedné z obou rovin. Přímka (1.221) a bod $[0, 0, -3]$ určují rovinu

$$4x + 2y - z - 3 = 0,$$

přímka (1.221) a bod $[0, 0, -\frac{1}{3}]$ dávají rovnici druhé roviny

$$2x - 4y + 3z + 1 = 0.$$

Na závěr uveďme, že původní rovnici kvadriky (1.214) můžeme napsat ve tvaru

$$(4x + 2y - z - 3)(2x - 4y + 3z + 1) = 0,$$

ze kterého můžeme roznásobením ověřit správnost našeho výpočtu. □

Cvičení:

1) Napište rovnici kulové plochy se středem v bodě $[-3, 2, -5]$ procházející počátkem.

2) Určete střed a poloměr kulové plochy o rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 8y - 14z - 10 = 0.$$

3) Vyšetřete kvadriky:

a) $7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 24xy - 12xz + 12yz - 84x + 90y - 24z - 63 = 0$,

b) $4x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 4xy - 12yz + 4x + 2y + 3z = 0$,

c) $x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 6xy - 8xz + 24yz - 4z - 2 = 0$,

d) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 6x - 8y + 2z + 10 = 0$,

e) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 12 = 0$,

f) $x^2 + 2y^2 - 2xy + 3yz - 6x + 7y + 6z + 7 = 0$,

g) $5x^2 - 4y^2 + z^2 - 8xy + 6xz + 2x - 8y + 6z - 8 = 0$,

h) $11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy + 4xz - 8yz - 22x - 1 = 0$,

i) $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12xy + 6xz - 4yz + 3x - 2y + z - 2 = 0$,

j) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz + 2x - 2y - 4 = 0$,

k) $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 5xy - 2xz + 3yz - 8x + 5y - 4z - 3 = 0$,

l) $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xz + 3yz - 14x - 13y - 17z + 30 = 0$,

m) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz - 6x + 18y + 24z = 0$,

n) $x^2 + 9y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 6yz + 8x - 24y + 8z + 16 = 0$,

o) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 10xy + 6xz + 6yz - 10x - 2y - 6z + 37 = 0$,

p) $xy + xz + yz - 1 = 0$,

q) $3x^2 - 3y^2 + z^2 + 8xy - 4xz - 2yz - 4x + 6y + 2z = 0$,

r) $15x^2 + 15y^2 - 2z^2 - 34xy - 30x + 34y + 15 = 0$,

s) $13x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 5x - z + 1 = 0$.

4) Napište rovnici rotačního hyperboloidu, který vznikne otočením hyperboly

$$x^2 - 3y^2 - 3$$

a) kolem hlavní osy,
b) kolem vedlejší osy.

5) Napište rovnici rotační válcové plochy o poloměru 5, jehož osa má rovnici

$$x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3 + 4t\ .$$

Poznámka: Výsledky cvičení jsou uvedeny v závěru knihy