Obrázek 1.7: Hyperbolické paraboloidy jako prvky zastřešení (pořízeno s laskavým svolením správy Mercury centra)

1.3 Vzájemná poloha přímky, roviny a kvadriky

Ze vzájemné polohy přímky a kvadriky nebo roviny a kvadriky lze odvodit řadu důležitých vlastností ploch druhého stupně. Nejprve se budeme zabývat vzájemnou polohou přímky a kvadriky.

1.3.1 Vzájemná poloha přímky a kvadriky

Je dána kvadrika

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{1.5}$$

a přímka s o rovnici $X = M + t\mathbf{u}$, kde bod M má souřadnice $M = [m, n, p]$ a pro směrový vektor $\mathbf{u}$ platí $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Přímka s má parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= m + tu \\ y &= n + tv \\ z &= p + tw. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Při vyšetřování vzájemné polohy přímky a kvadriky, můžeme postupovat podobně jako u kuželoseček. Abychom zjistili společné body přímky s a kvadriky (1.5), dosadíme x, y, a z ze soustavy (1.6) do rovnice (1.5). Pro parametr t společných bodů kvadriky a přímky dostaneme rovnici ve tvaru

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{1.7}$$

kde

$$\begin{aligned}
A &= a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw, \\
B &= u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + w(a_{31}m \\
&\quad + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}), \qquad (1.8) \\
C &= a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}mp + 2a_{23}np + 2a_{14}m \\
&\quad + 2a_{24}n + 2a_{34}p + a_{44}.
\end{aligned}$$

Poznámka:
Všimněte si, že

1) koeficient A závisí pouze na souřadnicích vektoru $\mathbf{u}$,

2) koeficent C vznikne dosazením souřadnic bodu M do levé strany rovnice kvadriky (1.5).

Pro průsečík kvadriky a přímky mohou nastat tyto případy:

a) $A = 0,\ B \neq 0,\ C$ libovolné — rovnice (1.7) je lineární s jedním kořenem $t = -C/(2B)$. Přímka má s kvadrikou společný jediný bod.

b) $A = 0,\ B = 0,\ C \neq 0$ — rovnice (1.7) nemá žádný kořen. Přímka nemá s kvadrikou společný žádný bod.

c) $A = 0,\ B = 0,\ C = 0$ — rovnice (1.7) je splněna pro každé t. Každý bod přímky je bodem kvadriky, přímka leží celá na kvadrice.

d) $A \neq 0,\ B^2 - AC > 0$ — rovnice (1.7) má dva různé reálné kořeny. Přímka má s kvadrikou společné dva různé body — sečna kvadriky.

e) $A \neq 0,\ B^2 - AC = 0$ — rovnice (1.7) má jeden dvojnásobný kořen. Přímka má s kvadrikou společný jeden (dvojnásobný) bod — tečna kvadriky.

f) $A \neq 0,\ B^2 - AC < 0$ — rovnice (1.7) nemá reálné kořeny. Přímka kvadriku neprotíná — nesečna.

1.3.2 Vzájemná poloha roviny a kvadriky

Při vyšetřování vzájemné polohy kvadriky (1.5) a roviny je výhodné zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, aby rovina řezu měla rovnici $z = 0$. Předpokládejme, že kvadrika má rovnici (1.5). Potom průnikem kvadriky a roviny je křivka o rovnici

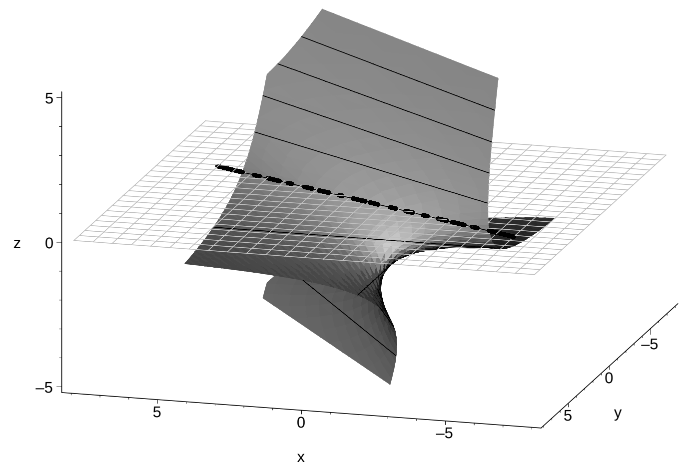
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0 \qquad (1.9)$$

jak zjistíme dosazením $z = 0$ do rovnice kvadriky (1.5). Pokud je alespoň jeden z koeficientů a_{11}, a_{12}, a_{22} různý od nuly, potom je rovnice (1.9) rovnicí kuželosečky. Tedy průnikem roviny a kvadriky je v tomto případě kuželosečka — elipsa, parabola, hyperbola, dvě různoběžky, dvě rovnoběžky, dvojnásobná

přímka, bod či prázdná množina.
Pokud $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ a alespoň jedno z čísel a_{14}, a_{24} je různé od nuly, potom je průnikem křivka o rovnici

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0,$$

tedy přímka (viz Obr. 1.8).

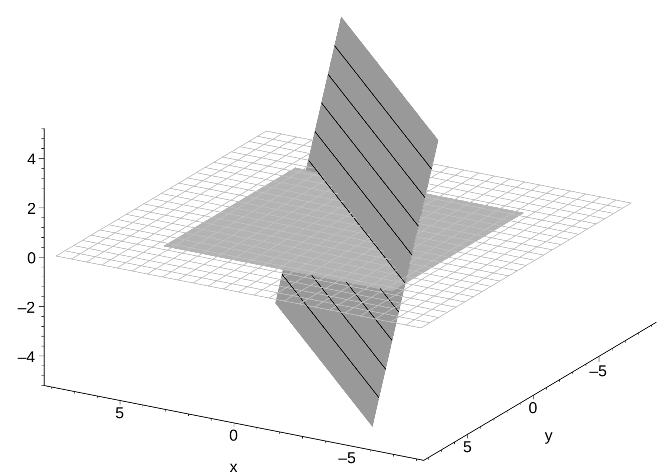


Obrázek 1.8: Průnikem kvadriky s rovinou $z = 0$ je přímka

Je-li $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0$, potom dostáváme rovnici

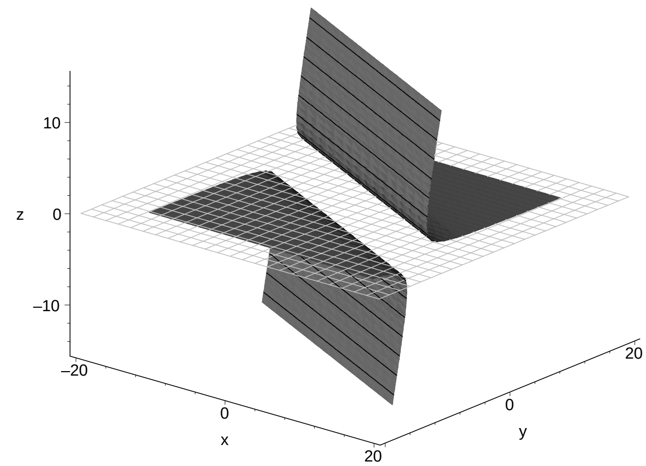
$$z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_{34}) = 0,$$

jejímž řešením je rovina $z = 0$, tedy rovina řezu, a rovina $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_{34} = 0$. V tomto případě je průnikem roviny a kvadriky celá rovina (a kvadrika se skládá ze dvou rovin).



Obrázek 1.9: Průnikem kvadriky s rovinou $z = 0$ je rovina

Konečně, jestliže $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{14} = a_{24} = 0$ a $a_{44} \neq 0$, je průnikem kvadriky a roviny množina prázdná.



Obrázek 1.10: Průnikem kvadriky s rovinou $z = 0$ je prázdná množina

1.4 Asymptotické směry

V této části budeme hovořit o asymptotických směrech kvadriky

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{1.10}$$

Nejprve podáme definici směru.

Definice: *Směrem daným nenulovým vektorem* $\mathbf{u}$ *rozumíme jednorozměrný vektorový prostor* $\{k\mathbf{u};\ k \in \mathbb{R}\}$.

Definice: *Směr daný nenulovým vektorem* $\mathbf{u} = (u, v, w)$, *se nazývá* **asymptotickým směrem** *kvadriky (1.10), jestliže platí*

$$a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = 0. \tag{1.11}$$

Poznámka:
Rovnice (1.11) z definice asymptotického směru je podmínka $A = 0$, kde A je koeficient v rovnici (1.7) pro výpočet průsečíků přímky a kvadriky. Tedy v případě, že přímka má asymptotický směr, rovnice (1.7) *není* kvadratická.

Příklad:
Určete asymptotické směry válcové plochy o rovnici

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{1.12}$$

Podle (1.11) pro asymptotické směry válcové plochy (1.12) platí rovnice

$$u^2 + v^2 = 0. \tag{1.13}$$