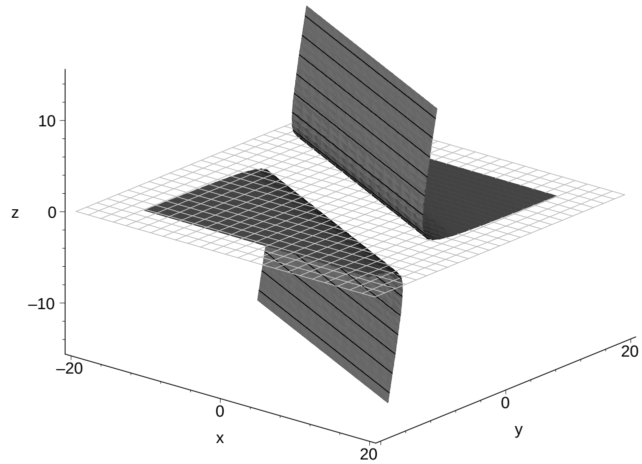
Konečně, jestliže $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{14} = a_{24} = 0$ a $a_{44} \neq 0$, je průnikem kvadriky a roviny množina prázdná.



Obrázek 1.10: Průnikem kvadriky s rovinou $z = 0$ je prázdná množina

1.4 Asymptotické směry

V této části budeme hovořit o asymptotických směrech kvadriky

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} = 0 \tag{1.10}$$

Nejprve podáme definici směru.

Definice: *Směrem daným nenulovým vektorem* $\mathbf{u}$ *rozumíme jednorozměrný vektorový prostor* $\{k\mathbf{u};\ k \in \mathbb{R}\}$.

Definice: *Směr daný nenulovým vektorem* $\mathbf{u} = (u, v, w)$, *se nazývá* **asymptotickým směrem** *kvadriky (1.10), jestliže platí*

$$a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = 0. \tag{1.11}$$

Poznámka:
Rovnice (1.11) z definice asymptotického směru je podmínka $A = 0$, kde A je koeficient v rovnici (1.7) pro výpočet průsečíků přímky a kvadriky. Tedy v případě, že přímka má asymptotický směr, rovnice (1.7) *není* kvadratická.

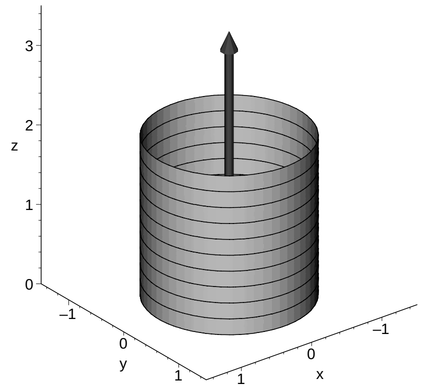
Příklad:
Určete asymptotické směry válcové plochy o rovnici

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{1.12}$$

Podle (1.11) pro asymptotické směry válcové plochy (1.12) platí rovnice

$$u^2 + v^2 = 0. \tag{1.13}$$

Tato rovnice má jediné reálné řešení $u = 0$, $v = 0$. Rovnici (1.13) vyhovuje jediný směr daný např. vektorem $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$. Je zřejmé, že se jedná o směr povrchových přímek válcové plochy (1.12).



Obrázek 1.11: Asymptotický směr válcové plochy

1.5 Střed, singulární body kvadriky

Při vyšetřování vzájemné polohy přímky s a kvadriky (1.10) jsme řešili rovnici

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{1.14}$$

jejíž koeficient B má tvar

$$\begin{aligned} B &= u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) \\ &\quad + w(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Zvolme bod $M = [m, n, p]$ přímky $s : \; X = M + t\mathbf{u}$ tak, aby byly splněny rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} &= 0 \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} &= 0 \\ a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Potom bez ohledu na souřadnice směrového vektoru $\mathbf{u}$ přímky s je podle (1.15) $B = 0$ a rovnice (1.14) má tvar

$$At^2 + C = 0. \tag{1.17}$$

Jestliže je kořenem této rovnice nějaké reálné číslo t_0, potom je kořenem (1.17) i číslo $-t_0$. Tedy na kvadrice leží při libovolné volbě vektoru společně s bodem $X_1 = M + t_0\mathbf{u}$ také bod $X_2 = M - t_0\mathbf{u}$. Bod M je středem úsečky neboť

$$M = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2.$$