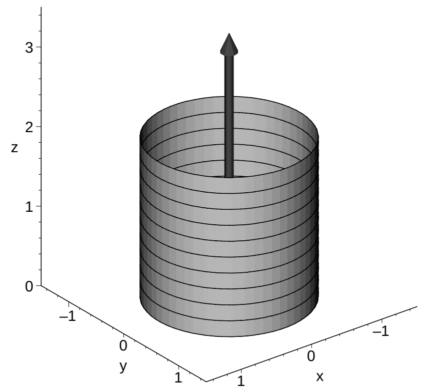
Tato rovnice má jediné reálné řešení $u = 0$, $v = 0$. Rovnici (1.13) vyhovuje jediný směr daný např. vektorem $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$. Je zřejmé, že se jedná o směr povrchových přímek válcové plochy (1.12).



Obrázek 1.11: Asymptotický směr válcové plochy

1.5 Střed, singulární body kvadriky

Při vyšetřování vzájemné polohy přímky s a kvadriky (1.10) jsme řešili rovnici

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{1.14}$$

jejíž koeficient B má tvar

$$\begin{aligned} B &= u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) \\ &\quad + w(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Zvolme bod $M = [m, n, p]$ přímky $s: \ X = M + t\mathbf{u}$ tak, aby byly splněny rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} &= 0 \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} &= 0 \\ a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Potom bez ohledu na souřadnice směrového vektoru $\mathbf{u}$ přímky s je podle (1.15) $B = 0$ a rovnice (1.14) má tvar

$$At^2 + C = 0. \tag{1.17}$$

Jestliže je kořenem této rovnice nějaké reálné číslo t_0, potom je kořenem (1.17) i číslo $-t_0$. Tedy na kvadrice leží při libovolné volbě vektoru společně s bodem $X_1 = M + t_0\mathbf{u}$ také bod $X_2 = M - t_0\mathbf{u}$. Bod M je středem úsečky neboť

$$M = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2.$$

Bod M je středem souměrnosti kvadriky. Zavedeme pojem středu kvadriky.

Definice: *Bod M nazveme střed kvadriky (1.10) jestliže pro libovolný bod X_1 kvadriky existuje bod X_2 kvadriky tak, že bod M je středem úsečky X_1X_2.*

O souřadnicích středu kvadriky platí následující věta:

Věta: *Bod $M = [m, n, p]$ je středem kvadriky (1.10) právě když platí soustava (1.16).*

Důkaz: Je-li splněna soustava (1.16) potom M je středem kvadriky — toto jsme ukázali. Nyní předpokládejme, že bod $M = [m, n, p]$ je středem kvadriky (1.10). Ukážeme, že potom platí (1.16).

Nechť $X_1 = [x_1, y_1, z_1]$ je libovolný bod kvadriky. Podle definice středu existuje bod $X_2 = [x_2, y_2, z_2]$ kvadriky tak, že $M = (X_1 + X_2)/2$, tj. platí

$$m = \frac{x_1 + x_2}{2},\ n = \frac{y_1 + y_2}{2},\ m = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{1.18}$$

Body X_1 a X_2 leží na přímce s o rovnici

$$\begin{aligned} x &= m + tu \\ y &= n + tv \\ z &= p + tw, \end{aligned} \tag{1.19}$$

proto platí

$$\begin{aligned} x_1 &= m + t_1u \qquad & x_2 &= m + t_2u \\ y_1 &= n + t_1v & y_2 &= n + t_2v \\ z_1 &= p + t_1w & z_2 &= p + t_2w. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Dosazením rovnic (1.20) do (1.18) dostaneme podmínky

$$u\frac{t_1 + t_2}{2} = 0, \quad v\frac{t_1 + t_2}{2} = 0, \quad w\frac{t_1 + t_2}{2} = 0.$$

Jelikož u, v a w nemohou být současně rovny nule, plyne odtud

$$t_1 + t_2 = 0. \tag{1.21}$$

Protože t_1 a t_2 jsou kořeny rovnice (1.14), ze vztahu (1.21) plyne $B = 0$ a odtud, protože směr daný čísly u, v, w je libovolný, podmínky (1.16). □

Definice: *Kvadrika, která má jediný střed, se nazývá* **středová kvadrika**.

Kvadrika má jediný střed právě když má soustava (1.16) jediné řešení. To nastane právě když je determinant

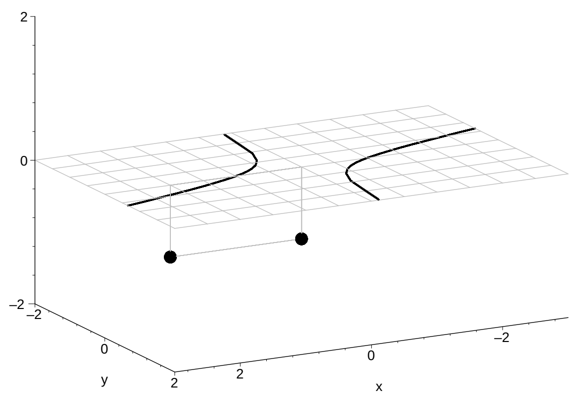
$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

různý od nuly. Odtud plyne

Věta: *Kvadrika je středová právě když* $A_{44} \neq 0$.

Příklad:
Napište rovnici kvadriky, která prochází bodem $A = [2, 0, -1]$, má střed $S = [0, 0, -1]$ a protíná rovinu $z = 0$ v kuželosečce

$$x^2 - 4xy - 1 = 0. \tag{1.23}$$



Obrázek 1.12: Zadání příkladu: Plocha je dána bodem, středem a průnikem s rovinou $z = 0$.

Řešení: Kvadrika má rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{1.24}$$

Označme

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

matici hledané kvadriky. Budeme postupně hledat koeficienty a_{ij}, které se vyskytují v matici (1.25).
Souřadnice středu $S = [0, 0, -1]$ musí podle (1.16) splňovat soustavu

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot (-1) + a_{14} & = & 0 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot (-1) + a_{24} & = & 0 \\ a_{31} \cdot 0 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot (-1) + a_{34} & = & 0\ . \end{array} \tag{1.26}$$

Odtud plyne

$$a_{13} = a_{14},\ a_{23} = a_{24},\ a_{33} = a_{34}. \tag{1.27}$$

Průnikem kvadriky (1.24) s rovinou $z = 0$ je křivka o rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0. \tag{1.28}$$

Porovnání rovnice (1.28) s rovnicí (1.23) dává

$$a_{11} = 1,\ a_{22} = 0,\ a_{12} = -2,\ a_{14} = 0,\ a_{24} = 0,\ a_{44} = -1. \tag{1.29}$$

Dosazením hodnot (1.29) a podmínek (1.27) do (1.25) dostaneme matici hledané kvadriky

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{33} \\ 0 & 0 & a_{33} & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

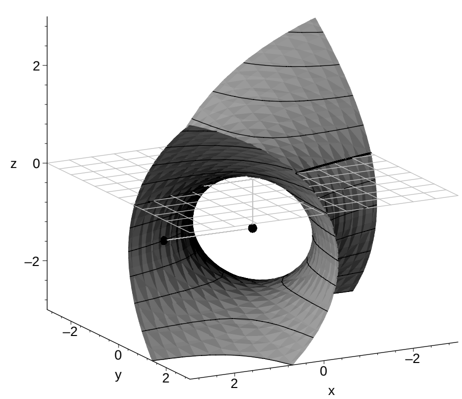
tj. kvadrika má tvar

$$x^2 - 4xy + a_{33}z^2 + 2a_{33}z - 1 = 0. \tag{1.31}$$

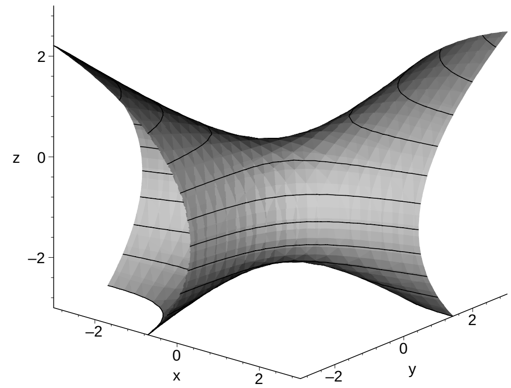
Zbývá určit hodnotu a_{33}, kterou zjistíme dosazením souřadnic bodu $A = [2, 0, -1]$ kvadriky do rovnice (1.31). Dostaneme $a_{33} = 3$.
Hledaná kvadrika má rovnici

$$x^2 - 4xy + 3z^2 + 6z - 1 = 0.$$

□



Obrázek 1.13: Řešení příkladu: Plocha daná bodem, středem a průnikem s rovinou $z = 0$ (Pohled 1).



Obrázek 1.14: Řešení příkladu: Plocha daná bodem, středem a průnikem s rovinou $z = 0$ (Pohled 2)

1.5.1 Singulární body

Je dána kvadrika

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} = 0. \tag{1.32}$$

Definice: *Bod* $M = [m, n, p]$ *je* **singulárním bodem** *kvadriky (1.32) jestliže jeho souřadnice vyhovují soustavě rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} &= 0 \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} &= 0 \\ a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} &= 0 \\ a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44} &= 0. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Z definice plyne, že singulární bod kvadriky je zároveň středem kvadriky, protože první tři rovnice z (1.33) jsou rovnice (1.16). Čtvrtá rovnice z (1.33) pak znamená, že bod M je bodem kvadriky, neboť

$a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + a_{33}p^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}mp + 2a_{23}np + 2a_{14}m + 2a_{24}n + 2a_{34}p + a_{44} = m(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + n(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + p(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}) + a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44} = 0.$

Můžeme tedy vyslovit větu:

Věta: *Bod* M *je singulárním bodem kvadriky právě když je jejím středem a zároveň na kvadrice leží.*

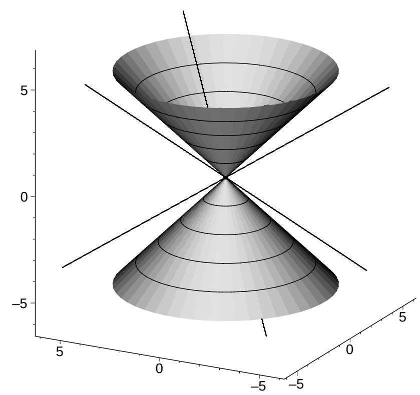
Vedeme-li singulárním bodem M přímku $s: \; X = M + t\mathbf{u}$, potom pro průsečíky přímky s a kvadriky (1.32) platí rovnice (1.7), která se v tomto případě redukuje na tvar

$$At^2 = 0, \tag{1.34}$$

neboť $B = C = 0$. Z rovnice (1.34) plyne, že přímka, procházející singulárním bodem kvadriky má s kvadrikou společný pouze tento singulární bod (je-li $A \neq 0$) nebo celá přímka na kvadrice leží ($A = 0$). Tedy platí věta:

Věta: *Každá přímka procházející singulárním bodem kvadriky, leží buď celá na kvadrice (v případě, že její směr je asymptotický) nebo má s kvadrikou společný pouze tento singulární bod (v případě, že její směr není asymptotický).*

Poznámka:
Příkladem singulárního bodu je např. vrchol kuželové plochy.



Obrázek 1.15: Vrchol kuželové plochy jako příklad singulárního bodu

1.6 Singulární kvadriky

Označme písmenem Δ determinant

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

matice **K** kvadriky (1.32). Podle toho, zda $\Delta = 0$ nebo $\Delta \neq 0$ rozdělíme všechny kvadriky do dvou disjunktních skupin.

Definice: *Kvadrika se nazývá* **singulární** *jestliže $\Delta = 0$. Jestliže $\Delta \neq 0$ potom se kvadrika nazývá* **regulární**.

Platí následující věta, která nám dává vztah mezi singulární kvadrikou a singulárními body.

Věta: *Obsahuje-li kvadrika singulární bod, pak je to kvadrika singulární.*

Důkaz: Nechť bod $M = [m, n, p]$ je singulárním bodem kvadriky (1.32). To