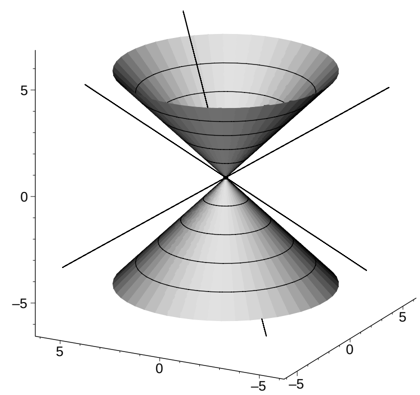
neboť $B = C = 0$. Z rovnice (1.34) plyne, že přímka, procházející singulárním bodem kvadriky má s kvadrikou společný pouze tento singulární bod (je-li $A \neq 0$) nebo celá přímka na kvadrice leží ($A = 0$). Tedy platí věta:

**Věta:** *Každá přímka procházející singulárním bodem kvadriky, leží buď celá na kvadrice (v případě, že její směr je asymptotický) nebo má s kvadrikou společný pouze tento singulární bod (v případě, že její směr není asymptotický).*

**Poznámka:**
Příkladem singulárního bodu je např. vrchol kuželové plochy.




Obrázek 1.15: Vrchol kuželové plochy jako příklad singulárního bodu

## 1.6 Singulární kvadriky

Označme písmenem $\Delta$ determinant

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

matice **K** kvadriky (1.32). Podle toho, zda $\Delta = 0$ nebo $\Delta \neq 0$ rozdělíme všechny kvadriky do dvou disjunktních skupin.

**Definice:** *Kvadrika se nazývá* **singulární** *jestliže $\Delta = 0$. Jestliže $\Delta \neq 0$ potom se kvadrika nazývá* **regulární**.

Platí následující věta, která nám dává vztah mezi singulární kvadrikou a singulárními body.

**Věta:** *Obsahuje-li kvadrika singulární bod, pak je to kvadrika singulární.*

**Důkaz:** Nechť bod $M = [m, n, p]$ je singulárním bodem kvadriky (1.32). To znamená, že jsou splněny rovnice (1.33). Soustavu (1.33) přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p &= -a_{14} \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p &= -a_{24} \\ a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p &= -a_{34} \\ a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p &= -a_{44}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Podle Frobeniovy věty má soustava rovnic (1.36) alespoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tedy

$$\mathrm{h}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \mathrm{h}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & -a_{44} \end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

Matice soustavy je typu $(4, 3)$, tedy její hodnost matice je menší nebo rovna třem, proto hodnost rozšířené matice soustavy je také menší nebo rovna třem. Odtud plyne, že $\Delta = 0$. □

**Poznámka:**
Obrácená věta neplatí. Válcová plocha je singulární kvadrikou, ale singulární bod neobsahuje.

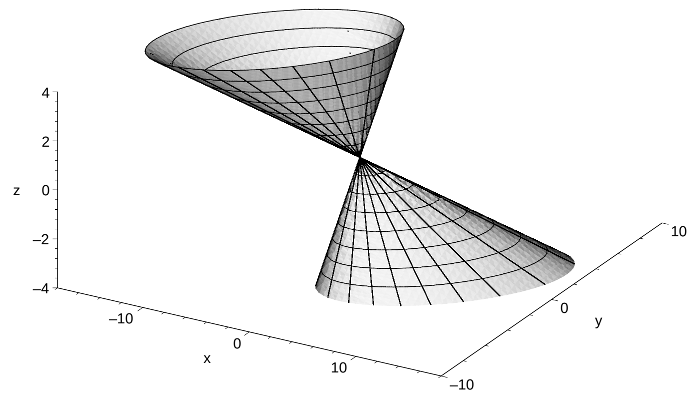
**Definice:** *Bod kvadriky, který není singulární se nazývá* **regulární**.

V následujícím textu ukážeme příklady některých singulárních kvadrik. Protože v těchto případech vždy $\Delta = 0$, je hodnost matice kvadriky

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

buď 3 nebo 2 nebo 1.

Nechť $h(K) = 3$. Nejprve předpokládejme, že první tři řádky matice (1.38) jsou lineárně nezávislé. Dále předpokládejme, že kvadrika má jediný střed $M = [m, n, p]$, tj. platí rovnice (1.16). Protože čtvrtý řádek matice $K$ je lineární kombinací ostatních řádků, plyne odtud platnost rovnic (1.33), a bod $M$ je tedy jediným singulárním bodem kvadriky. Plocha, která má tuto vlastnost se nazývá *kuželová plocha*.




Obrázek 1.16: Kuželová plocha

Najdeme její rovnici. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby pro singulární bod $M$ platilo $M = [0,0,0]$. Protože $M = [0,0,0]$ je řešením soustavy (1.33), plyne odtud $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$ a rovnice kuželové plochy má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0. \tag{1.39}$$

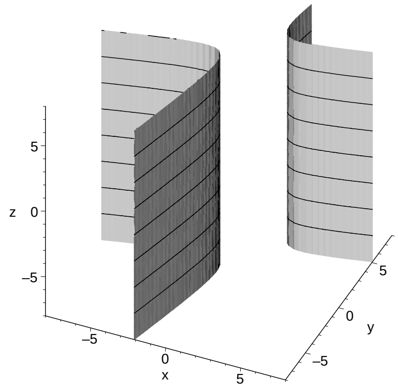
Jiným příkladem singulární kvadriky, pro jejíž matici platí $h(K) = 3$, je *válcová plocha* daná rovnicí

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{1.40}$$

jejíž tvořící přímky procházejí regulární kuželosečkou (1.40) a jsou kolmé na souřadnicovou rovinu $xy$. Skutečně, matice kvadriky (1.40)

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & d \\ b & c & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & e & 0 & f \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

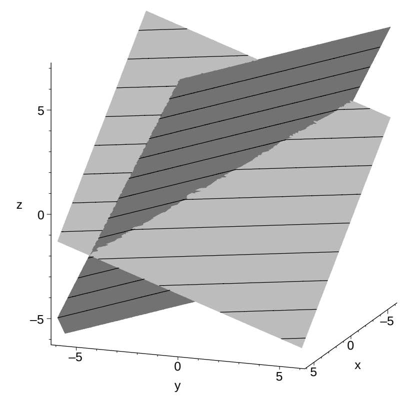
má hodnost 3.




Obrázek 1.17: Válcová plocha

Nechť $h(K) = 2$. Příkladem singulární kvadriky, jejíž matice má hodnost 2, je *dvojice různoběžných rovin* $\alpha$ a $\beta$

$$\alpha: \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \qquad \beta: \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \tag{1.42}$$




Obrázek 1.18: Dvě různoběžné roviny

Rovnice příslušné kvadriky je

$$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0. \tag{1.43}$$

Matice kvadriky (1.43) má (po vynásobení dvěma) tvar

$$\begin{pmatrix} 2a_1a_2 & a_1b_2 + a_2b_1 & a_1c_2 + a_2c_1 & a_1d_2 + a_2d_1 \\ b_1a_2 + b_2a_1 & 2b_1b_2 & b_1c_2 + b_2c_1 & b_1d_2 + b_2d_1 \\ c_1a_2 + c_2a_1 & c_1b_2 + c_2b_1 & 2c_1c_2 & c_1d_2 + c_2d_1 \\ d_1a_2 + d_2a_1 & d_1b_2 + d_2b_1 & d_1c_2 + d_2c_1 & 2d_1d_2 \end{pmatrix}. \tag{1.44}$$

Hodnost matice lze vypočítat buď přímo, což je zdlouhavé nebo následujícím postupem. Označíme-li $\mathbf{u}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ a $\mathbf{u}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, potom můžeme matici (1.44) napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_2\mathbf{u}_1 & + & a_1\mathbf{u}_2 \\ b_2\mathbf{u}_1 & + & b_1\mathbf{u}_2 \\ c_2\mathbf{u}_1 & + & c_1\mathbf{u}_2 \\ d_2\mathbf{u}_1 & + & d_1\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

Protože roviny $\alpha$ a $\beta$ jsou různoběžné, jsou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ lineárně nezávislé a hodnost matice (1.45) je rovna dvěma.

Nechť $h(K) = 1$. Příkladem kvadriky, jejíž matice má hodnost 1 je *dvojnásobná rovina.* Rovnice příslušné kvadriky je

$$(ax + by + cz + d)^2 = 0. \tag{1.46}$$

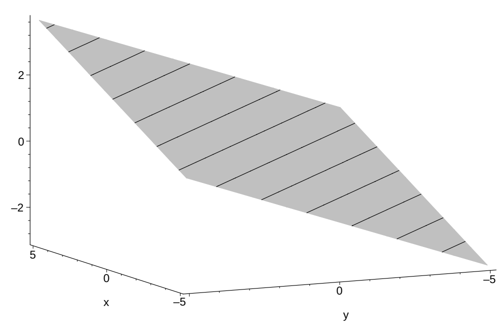
a její matice má tvar

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

Označíme-li $\mathbf{u} = (a, b, c, d)$, potom (1.47) lze psát ve tvaru

$$(a\mathbf{u}, b\mathbf{u}, c\mathbf{u}, d\mathbf{u})^\top.$$

Je zřejmé, že hodnost matice (1.47) je rovna jedné.




Obrázek 1.19: Dvojnásobná rovina

Existují i další příklady singulárních kvadrik, které zde nebudeme uvádět. Výčet všech singulárních kvadrik uvedeme při jejich klasifikaci.

## 1.7 Tečna a tečná rovina

V této kapitole se budeme zabývat tečnou a tečnou rovinou v regulárním bodě kvadriky. Uvědomme si, že regulární bod je takový bod, který není singulárním bodem. Na regulární kvadrice jsou všechny body regulární, protože pokud by