můžeme matici (1.44) napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_2\mathbf{u}_1 & + & a_1\mathbf{u}_2 \\ b_2\mathbf{u}_1 & + & b_1\mathbf{u}_2 \\ c_2\mathbf{u}_1 & + & c_1\mathbf{u}_2 \\ d_2\mathbf{u}_1 & + & d_1\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

Protože roviny α a β jsou různoběžné, jsou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ lineárně nezávislé a hodnost matice (1.45) je rovna dvěma.

Nechť $h(K) = 1$. Příkladem kvadriky, jejíž matice má hodnost 1 je *dvojnásobná rovina.* Rovnice příslušné kvadriky je

$$(ax + by + cz + d)^2 = 0. \tag{1.46}$$

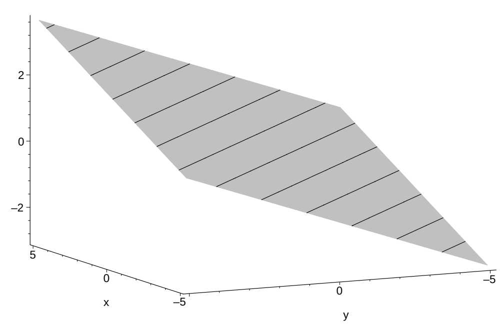
a její matice má tvar

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

Označíme-li $\mathbf{u} = (a, b, c, d)$, potom (1.47) lze psát ve tvaru

$$(a\mathbf{u}, b\mathbf{u}, c\mathbf{u}, d\mathbf{u})^\top.$$

Je zřejmé, že hodnost matice (1.47) je rovna jedné.



Obrázek 1.19: Dvojnásobná rovina

Existují i další příklady singulárních kvadrik, které zde nebudeme uvádět. Výčet všech singulárních kvadrik uvedeme při jejich klasifikaci.

1.7 Tečna a tečná rovina

V této kapitole se budeme zabývat tečnou a tečnou rovinou v regulárním bodě kvadriky. Uvědomme si, že regulární bod je takový bod, který není singulárním bodem. Na regulární kvadrice jsou všechny body regulární, protože pokud by kvadrika obsahovala singulární bod, byla by kvadrikou singulární. Regulární body mohou ležet i na singulární kvadrice. Např. na kuželové ploše je jediným singulárním bodem vrchol kuželové plochy. Všechny ostatní body jsou regulární.

Je dána kvadrika

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{1.48}$$

a nechť $M=[m,n,p]$ je regulární bod kvadriky. Budeme zkoumat tečnu kvadriky s dotykovým bodem v bodě M. Předpokládejme, že tečna t má tvar

$$t: \ X = M + t\mathbf{u}, \tag{1.49}$$

kde $X=[x,y,z]$ a směr daný nenulovým vektorem $\mathbf{u}=(u,v,w)$ není asymptotický.
Nejprve podáme definici tečny.

Definice: *Tečna kvadriky je přímka, která má v bodě dotyku s kvadrikou dvojnásobný průsečík.*

V rovnici

$$At^2+2Bt+C=0 \tag{1.50}$$

je $C=0$, neboť bod M leží na kvadrice (1.48). Rovnice (1.50) má nyní tvar

$$At^2+2Bt=0\ . \tag{1.51}$$

Bod M bude dvojnásobným průsečíkem právě když 0 bude dvojnásobným kořenem rovnice (1.51). To nastane právě když v (1.51)

$$B=0\ , \tag{1.52}$$

tj. platí-li podle (1.8)

$$u(a_{11}m+a_{12}n+a_{13}p+a_{14})+v(a_{21}m+a_{22}n+a_{23}p+a_{24})+w(a_{31}m+ a_{32}n+a_{33}p+a_{34})=0. \tag{1.53}$$

Množina řešení rovnice (1.53) je vektorový prostor ortogonální na vektor

$$(a_{11}m+a_{12}n+a_{13}p+a_{14}, a_{21}m+a_{22}n+a_{23}p+a_{24}, a_{31}m+a_{32}n+a_{33}p+a_{34})\ .$$

Jeho dimenze je tedy 2. Je nutné si uvědomit, že alespoň jeden z koeficientů $a_{i1}m+a_{i2}n+a_{i3}p+a_{i4}$ pro $i=1,2,3$, je různý od nuly. V opačném případě by totiž byl podle (1.33) bod M bodem singulárním. Odtud tvrzení:

Věta: *Přímka (1.49) je tečnou kvadriky (1.48) v regulárním bodě M právě když vektor $\overrightarrow{u}$ splňuje (1.53).*

Z předchozí úvahy plyne, že všechny tečny kvadriky v bodě M leží v rovině τ

$$\tau: \ (a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14})x + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24})y + (a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34})z + a_{41}m + a_{42}n + a_{43}p + a_{44} = 0 \ . \tag{1.54}$$

Definice: *Rovina τ o rovnici (1.54) se nazývá* **tečná rovina** *kvadriky (1.48) v bodě M. Bod M se nazývá* **bod dotyku.**

Je výhodné napsat rovnici tečné roviny τ (1.54) v maticovém tvaru

$$\tau = \begin{pmatrix} m & n & p & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ , \tag{1.55}$$

jak se můžeme snadno přesvědčit. Maticový tvar rovnice tečné roviny se totiž velmi podobá maticovému tvaru (1.2) rovnice kvadriky.

Poznámka:
Tečnou rovinu kvadriky v (regulárním) bodě M můžeme též definovat jako rovinu, v níž leží všechny tečny kvadriky v bodě M. Tečná rovina tak může obsahovat kromě bodu dotyku M ještě další body. Např. tečná rovina válcové plochy se této plochy dotýká podél celé povrchové přímky.

Definice: *Kolmici k tečné rovině procházející bodem M nazýváme* **normála** *kvadriky v bodě M.*

Příklad:
Určete, při které hodnotě k se rovina $x - 2y - 2z + k = 0$ dotýká kvadriky

$$x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 144 = 0. \tag{1.56}$$

Řešení: Tečná rovina kvadriky (1.56) s bodem dotyku v bodě $M = [m, n, p]$ má podle (1.55) rovnici

$$\begin{pmatrix} m & n & p & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -144 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ , \tag{1.57}$$

tj.

$$mx + 4ny + 16pz - 144 = 0. \tag{1.58}$$

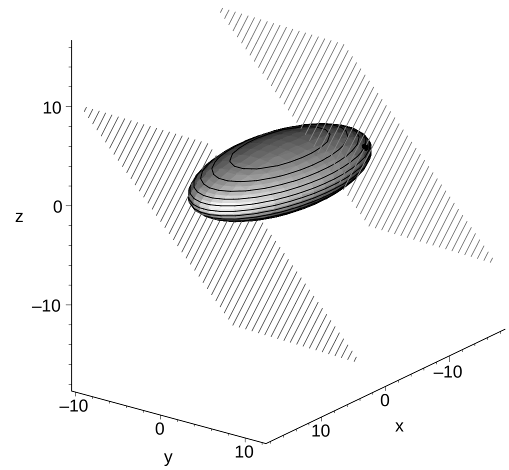
Porovnáním rovnice $x - 2y - 2z + k = 0$ s rovnicí $mx + 4ny + 16pz - 144 = 0$ dostaneme podmínky

$$4n = -2m, \ 16p = -2m, \ -144 = mk. \tag{1.59}$$

K podmínkám (1.59) je nutné ještě přidat rovnici

$$m^2 + 4n^2 + 16p^2 - 144 = 0, \tag{1.60}$$

protože bod dotyku $M = [m, n, p]$ náleží kvadrice (1.56).
Hodnotu k dostaneme řešením soustavy čtyř rovnic (1.59), (1.60) o čtyřech neznámých m, n, p, k. Dosazením za $n = -\frac{m}{2}$, $p = -\frac{m}{8}$ do (1.60) dostaneme $m = \pm 8$ a odtud $k = \pm 18$.
Tečné roviny jsou dvě:
hodnotě $k = 18$ odpovídá bod dotyku $M_1 = [8, -4, -1]$ a hodnotě $k = -18$ odpovídá bod dotyku $M_2 = [-8, 4, 1]$. □



Obrázek 1.20: Řešení příkladu: Tečné roviny kvadriky

1.8 Rovina sdružená se směrem

V předchozí kapitole jsme zkoumali tečnu a tečnou rovinu v daném regulárním bodě kvadriky. Nyní úlohu zobecníme tak, že budeme hledat rovnici tečny ke kvadrice z daného bodu R, který obecně na kvadrice neleží.

1.8.1 Polární rovina

Předpokládejme, že je dána kvadrika

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} = 0 \tag{1.61}$$

a libovolný bod $R = [r, s, u]$, který není středem kvadriky. Z bodu R vedeme ke kvadrice (1.61) tečnu $p: \ X = R + t(T - R)$, kde $T = [m, n, p]$ je bod dotyku. Potom směrový vektor $T - R = (m - r, n - s, p - u)$ musí podle (1.53)