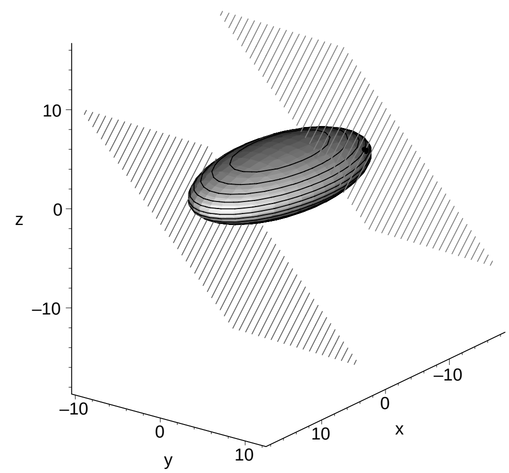
protože bod dotyku $M = [m, n, p]$ náleží kvadrice (1.56).
Hodnotu k dostaneme řešením soustavy čtyř rovnic (1.59), (1.60) o čtyřech neznámých m, n, p, k. Dosazením za $n = -\frac{m}{2}$, $p = -\frac{m}{8}$ do (1.60) dostaneme $m = \pm 8$ a odtud $k = \pm 18$.
Tečné roviny jsou dvě:
hodnotě $k = 18$ odpovídá bod dotyku $M_1 = [8, -4, -1]$ a hodnotě $k = -18$ odpovídá bod dotyku $M_2 = [-8, 4, 1]$. □



Obrázek 1.20: Řešení příkladu: Tečné roviny kvadriky

1.8 Rovina sdružená se směrem

V předchozí kapitole jsme zkoumali tečnu a tečnou rovinu v daném regulárním bodě kvadriky. Nyní úlohu zobecníme tak, že budeme hledat rovnici tečny ke kvadrice z daného bodu R, který obecně na kvadrice neleží.

1.8.1 Polární rovina

Předpokládejme, že je dána kvadrika

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{1.61}$$

a libovolný bod $R = [r, s, u]$, který není středem kvadriky. Z bodu R vedeme ke kvadrice (1.61) tečnu $p: \; X = R + t(T - R)$, kde $T = [m, n, p]$ je bod dotyku. Potom směrový vektor $T - R = (m - r, n - s, p - u)$ musí podle (1.53) splňovat rovnici

$$(m-r)(a_{11}m+a_{12}n+a_{13}p+a_{14})+(n-s)(a_{21}m+a_{22}n+a_{23}p+a_{24})+ \\ (p-u)(a_{31}m+a_{32}n+a_{33}p+a_{34})=0. \tag{1.62}$$

Rozepsáním vztahu (1.62) s využitím faktu, že bod T leží na kvadrice, dostaneme

$$(a_{11}r+a_{12}s+a_{13}u+a_{14})m+(a_{21}r+a_{22}s+a_{23}u+a_{24})n+(a_{31}r+a_{32}s+ \\ a_{33}u+a_{34})p+a_{41}r+a_{42}s+a_{43}u+a_{44}=0. \tag{1.63}$$

Z rovnice (1.63) je zřejmé, že body dotyku všech tečen z bodu R ke kvadrice (1.61) leží v rovině π

$$\pi:\ (a_{11}r+a_{12}s+a_{13}u+a_{14})x+(a_{21}r+a_{22}s+a_{23}u+a_{24})y+(a_{31}r+a_{32}s+ \\ a_{33}u+a_{34})z+a_{41}r+a_{42}s+a_{43}u+a_{44}=0. \tag{1.64}$$

Definice: *Rovina (1.64) se nazývá* **polární rovina** *bodu* $R=[r,s,u]$ *vzhledem ke kvadrice (1.61). Bod R nazýváme* **pól** *polární roviny.*

Maticové vyjádření polární roviny π je následující

$$\begin{pmatrix} r & s & u & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{1.65}$$

Poznámka:

1) Dotykové body tečen, vedených z bodu R ke kvadrice leží na kuželosečce. Z předchozí úvahy totiž víme, že dotykové body tečen leží v polární rovině, a ta protíná kvadriku v kuželosečce.

2) Zvolíme-li bod R na kvadrice, potom je polární rovina tečnou rovinou v daném bodě dotyku R, který je jejím pólem. Polární rovina je tedy zobecněním pojmu tečná rovina.

3) Pokud je bod R středem kvadriky (1.61), potom jsou všechny koeficienty u proměnných x, y, z v rovnici (1.64) rovny nule a polární rovina není definována.

Na závěr této kapitoly zmiňme následující vlastnost pólu a jeho polární roviny vzhledem ke kvadrice.

Věta: *Polární rovina bodu* R *prochází bodem* R' *právě když polární rovina bodu* R' *obsahuje bod* R.

Důkaz: Prochází-li polární rovina

$$(a_{11}r+a_{12}s+a_{13}u+a_{14})x+(a_{21}r+a_{22}s+a_{23}u+a_{24})y+(a_{31}r+a_{32}s+ \\ a_{33}u+a_{34})z+a_{41}r+a_{42}s+a_{43}u+a_{44}=0. \tag{1.66}$$

bodu $R = [r, s, u]$ bodem $R' = [r', s', u']$, potom

$$(a_{11}r + a_{12}s + a_{13}u + a_{14})r' + (a_{21}r + a_{22}s + a_{23}u + a_{24})s' + (a_{31}r + a_{32}s + a_{33}u + a_{34})u' + a_{41}r + a_{42}s + a_{43}u + a_{44} = 0. \tag{1.67}$$

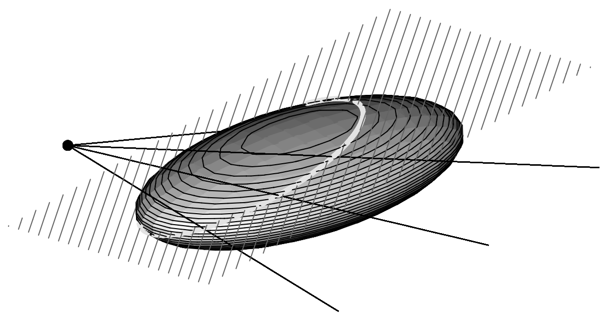
Vztah (1.67) můžeme přepsat do tvaru

$$(a_{11}r' + a_{12}s' + a_{13}u' + a_{14})r + (a_{21}r' + a_{22}s' + a_{23}u' + a_{24})s + (a_{31}r' + a_{32}s' + a_{33}u' + a_{34})u + a_{41}r' + a_{42}s' + a_{43}u' + a_{44} = 0, \tag{1.68}$$

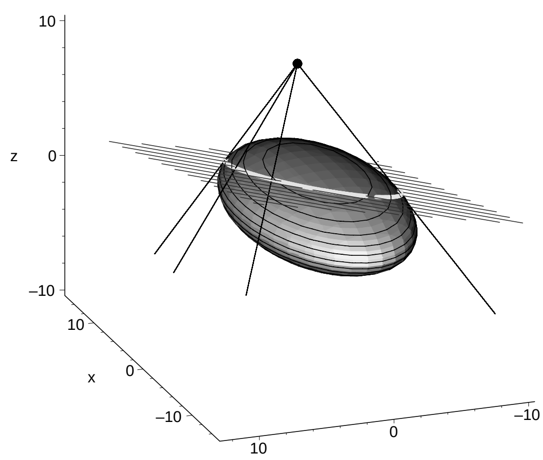
ze kterého plyne, že polární rovina bodu R' obsahuje bod R. Důkaz opačné implikace je obdobný. □

Příklad: Polární rovina bodu $R = [15, -4, 5]$ vzhledem ke kvadrice

$$x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 144 = 0.$$



Obrázek 1.21: Polární rovina bodu R vzhledem k dané kvadrice (Pohled 1)



Obrázek 1.22: Polární rovina bodu R vzhledem k dané kvadrice (Pohled 2)