1.9 Průměrová rovina

Předchozí úvahy dále zobecníme. Budeme vyšetřovat tečny kvadriky, které jsou rovnoběžné s daným směrem.

Je dána kvadrika

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{1.69}$$

a nechť je dán neasymptotický směr vektorem $\mathbf{u}=(u,v,w)$. Označme

$$p:\ X=M+t\mathbf{u} \tag{1.70}$$

tečnu ve směru $\mathbf{u}$, kde $M=[m,n,p]$ je bod dotyku tečny a kvadriky. Vektor $\mathbf{u}$ splňuje podle (1.53) rovnici

$$\begin{gathered}u(a_{11}m+a_{12}n+a_{13}p+a_{14})+v(a_{21}m+a_{22}n+a_{23}p+a_{24})+w(a_{31}m+\\ a_{32}n+a_{33}p+a_{34})=0,\end{gathered} \tag{1.71}$$

kterou lze přepsat na tvar

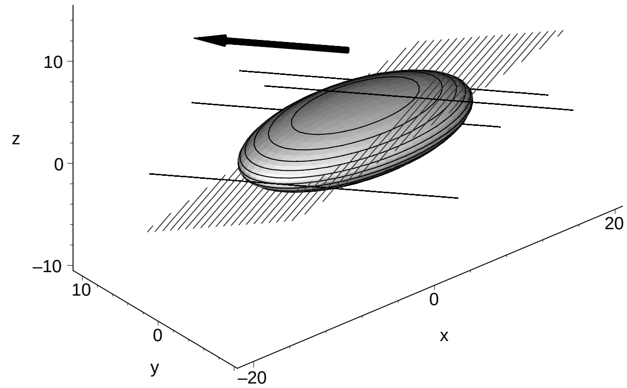
$$\begin{gathered}(a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w)m+(a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w)n+(a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w)p+\\ +a_{41}u+a_{42}v+a_{43}w=0.\end{gathered} \tag{1.72}$$

Ze vztahu (1.72) plyne, obdobně jako v předchozí kapitole, že dotykové body $M=[m,n,p]$ tečen, které jsou rovnoběžné s neasymptotickým směrem $\mathbf{u}=(u,v,w)$, leží v rovině

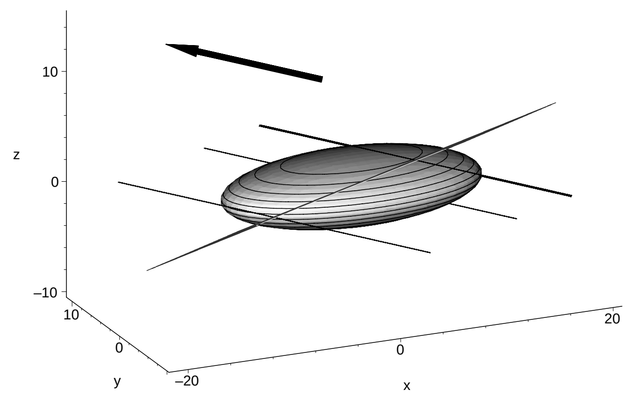
$$\begin{gathered}(a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w)x+(a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w)y+(a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w)z+\\ a_{41}u+a_{42}v+a_{43}w=0.\end{gathered} \tag{1.73}$$

Odtud následující definice

Definice: *Nechť* $\mathbf{u}=(u,v,w)$ *je vektor neasymptotického směru. Potom se rovina (1.73) nazývá* **průměrová rovina** *sdružená se směrem* $\mathbf{u}$ *vzhledem ke kvadrice (1.69).*



Obrázek 1.23: Průměrová rovina sdružená s daným směrem (Pohled 1)



Obrázek 1.24: Průměrová rovina sdružená s daným směrem (Pohled 2)

Poznámka:
1) Alespoň jeden z koeficientů $a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w$, $a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w$, $a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w$ u proměnných x, y, z v rovnici (1.73) je různý od nuly. V opačném případě by totiž platilo

$$\begin{aligned}&a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = u(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)\\&+v(a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w) + w(a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w) = 0\end{aligned} \tag{1.74}$$

a směr určený vektorem $\mathbf{u}$ by byl asymptotický. Průměrová rovina je tedy pro neasymptotický směr vždy definována.

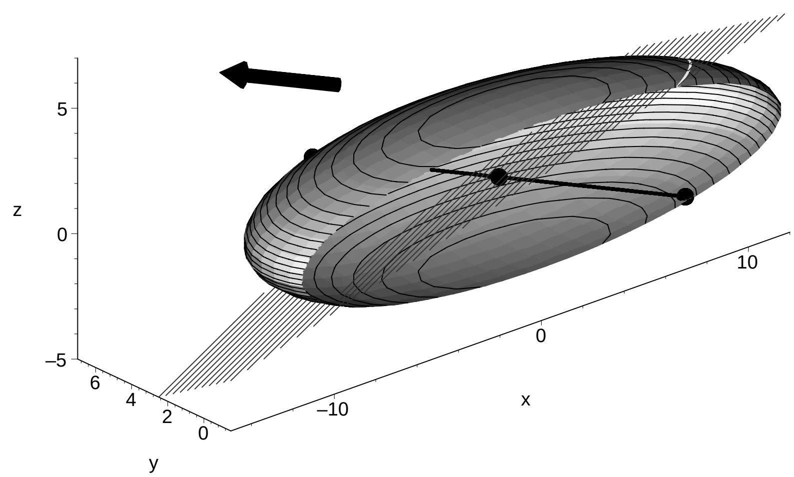
2) Rovnicí (1.73) můžeme definovat i průměrovou rovinu sdruženou s asymptotickým směrem s výjimkou případu, kdy všechny tři koeficienty u proměnných x, y, z v (1.73) jsou rovny nule.

Průměrovou rovinu sdruženou s daným směrem $\mathbf{u}$ lze vyjádřit také v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} u & v & w & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0\ . \tag{1.75}$$

Průměrová rovina má následující vlastnost:

Věta: *Průměrová rovina sdružená se směrem* **u** *obsahuje středy tětiv kvadriky, které jsou rovnoběžné se směrem* **u**.



Obrázek 1.25: Tětiva rovnoběžná se směrem $\vec{u}$

Důkaz: Nechť přímka s ve směru **u** protíná kvadriku (1.69) v bodech M_1 a M_2. Potom pro střed $M = [m, n, p]$ tětivy M_1, M_2 platí $M = 1/2M_1 + 1/2M_2$. Píšeme-li $s:\ X = M + t\mathbf{u}$, potom je, podle předchozích úvah, v rovnici

$$At^2 + 2Bt + C = 0 \tag{1.76}$$

koeficient B roven nule, tj.:

$$u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24}) + w(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}) = 0. \tag{1.77}$$

Z (1.77) dostaneme rovnici

$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)m + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)n + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)p + a_{41}u + a_{42}v + a_{43}w = 0, \tag{1.78}$$

ze které plyne, že střed tětivy $M = [m, n, p]$ leží v průměrové rovině (1.73). □

Poznámka:
1) Vlastnost průměrové roviny z předchozí věty se často užívá k její definici. Průměrová rovina je definována jako rovina, ve které leží středy tětiv daného směru.

2) V projektivním rozšíření prostoru E^3 se zavádějí dva druhy bodů – body vlastní a body nevlastní. Každý bod má místo tří souřadnic, souřadnice čtyři. Souřadnice vlastního bodu mají tvar $[x, y, z, 1]$, kde $[x, y, z]$ jsou kartézské (afinní) souřadnice daného bodu a čtvrtá souřadnice 1 značí, že se jedná o vlastní bod. Naproti tomu bod o souřadnicích $[x, y, z, 0]$ je nevlastní bod, určený směrem vektoru (x, y, z). Průměrovou rovinu sdruženou se směrem $\mathbf{u}$ můžeme tedy podle vyjádření (1.75) chápat jako *polární rovinu nevlastního bodu* $(u, v, w, 0)$ vzhledem ke kvadrice (1.69).

Věta: *Každá průměrová rovina obsahuje všechny středy kvadriky.*

Důkaz: Souřadnice středu $M = [m, n, p]$ kvadriky vyhovují rovnicím

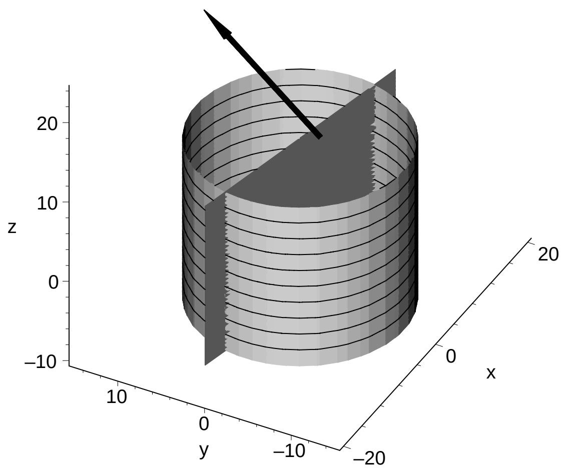
$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14} &= 0 \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p + a_{24} &= 0 \\ a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34} &= 0. \end{aligned} \tag{1.79}$$

Ze soustavy rovnic (1.79) plyne

$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)m + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)n + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)p+ a_{41}u + a_{42}v + a_{43}w = u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}p + a_{14}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}p+ a_{24}) + w(a_{31}m + a_{32}n + a_{33}p + a_{34}) = 0\ .$$

Tedy středy kvadriky vyhovují rovnici průměrové roviny (1.73). Věta je dokázána. □

Podle předchozí věty tedy dostáváme:
Obsahuje-li kvadrika jediný střed, potom každá průměrová rovina prochází tímto bodem (např. kulová plocha). Obsahuje-li kvadrika přímku středů, potom každá rovina svazku, jehož osou je přímka středů, je průměrová rovina (např. válcová plocha). Konečně, je-li množinou středů kvadriky celá rovina, je průměrovou rovinou tato rovina středů (např. dvě rovnoběžné roviny).



Obrázek 1.26: Průměrová rovina válcové plochy

Věta: *Je-li definována průměrová rovina sdružená s asymptotickým směrem, potom je s tímto směrem rovnoběžná.*

Důkaz: Je-li asymptotický směr dán vektorem $\mathbf{u} = (u, v, w)$, potom pro normálový vektor průměrové roviny sdružené se směrem $\mathbf{u}$

$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)x + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)y + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)z + a_{41}u + a_{42}v + a_{43}w = 0 \tag{1.80}$$

podle (1.11) platí

$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)u + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)v + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)w = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = 0. \tag{1.81}$$

Ze vztahu (1.81) plyne, že průměrová rovina (1.80) je rovnoběžná s asymptotickým směrem $\mathbf{u}$. Věta je dokázána. □

1.10 Hlavní směry

Uvažujme kvadriku

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{1.82}$$

Ke každému neasymptotickému směru $\mathbf{u} = (u, v, w)$ kvadriky (1.82) umíme podle předchozí kapitoly přiřadit průměrovou rovinu, sdruženou s tímto směrem. Rovnice této roviny je

$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)x + (a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w)y + (a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)z + a_{41}u + a_{42}v + a_{43}w = 0. \tag{1.83}$$