Kapitola 2

Popis jednotlivých kvadrik

V této kapitole se budeme zabývat některými kvadrikami podrobněji. Nejprve budeme uvažovat elipsoidy a hyperboloidy, které patří do skupiny regulárních středových kvadrik. Poté uvedeme vlastnosti paraboloidů. V další části budeme zkoumat kuželové a válcové plochy, které patří do skupiny singulárních kvadrik.
Uvedeme vlastnosti, které jsou pro dané plochy charakteristické, rovněž připojíme možnosti použití uvedených ploch v praxi.

2.1 Elipsoidy

Trojosý elipsoid je středová regulární kvadrika, která má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.1}$$

Kladná čísla a, b, c jsou délky os elipsoidu, obr. 2.1

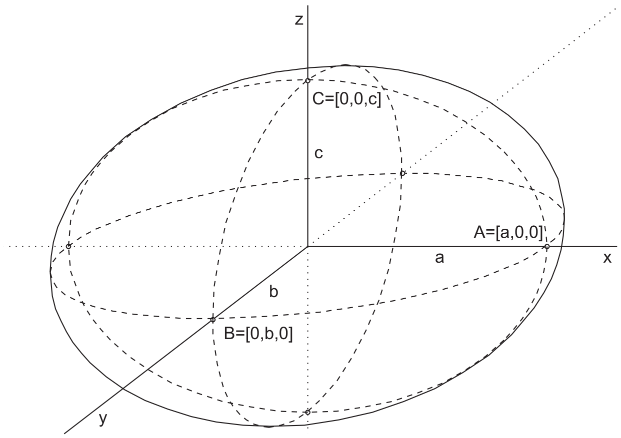
Souřadnicová rovina $z = 0$ protíná elipsoid (2.1) v elipse o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.2}$$

jak se lze snadno přesvědčit dosazením za $z = 0$ do rovnice elipsoidu (2.1).
Vezmeme-li místo souřadnicové roviny $z = 0$ rovinu s ní rovnoběžnou $z = k$, pro nějakou konstantu k, vidíme, že pro $|k| > c$ rovina elipsoid neprotíná, pro $|k| < c$ rovina $z = k$ protíná elipsoid v elipse, která je podobná elipse (2.2).
Pro $k = c$ je průnikem jediný bod $[0, 0, c]$, který je bodem dotyku tečné roviny $z = c$. Obdobné platí pro rovinu $z = -c$.

Ostatní souřadnicové roviny $y = 0$ a $x = 0$ protínají elipsoid po řadě v elipsách o rovnicích

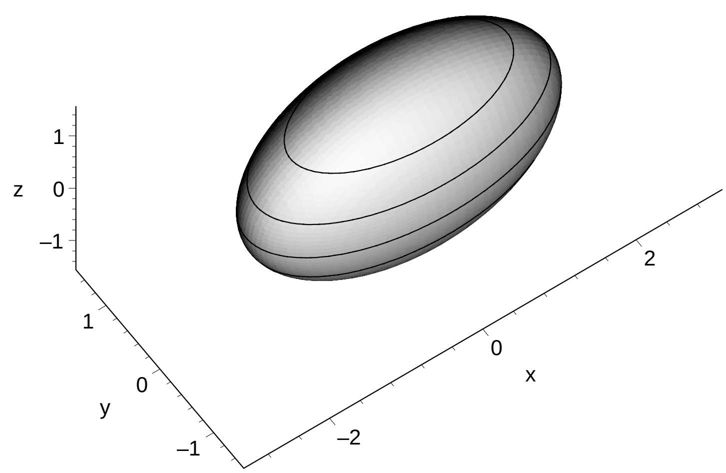
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Obrázek 2.1: Trojosý elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Analogický výsledek jako pro rovinu $z = k$ dostaneme, vezmeme-li místo rovin $y = 0$ a $x = 0$ roviny s nimi rovnoběžné $y = k$ a $x = k$, pro nějakou reálnou konstantu k.

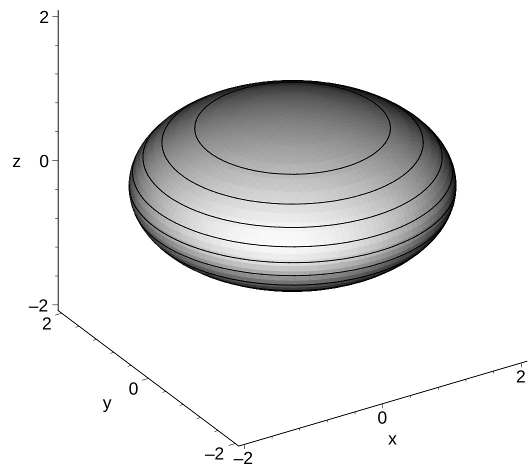
Vrcholy elipsoidu A, B, C, D, E, F jsou body o souřadnicích $A = [a, 0, 0]$, $B = [0, b, 0]$, $C = [0, 0, c]$, $D = [-a, 0, c]$, $E = [0, -b, c]$, $F = [0, 0, -c]$. Vrcholy leží v průsečících tří os elipsoidu (které v našem případě splývají s osami souřadnic x, y, z) s elipsoidem.



Obrázek 2.2: Trojosý elipsoid

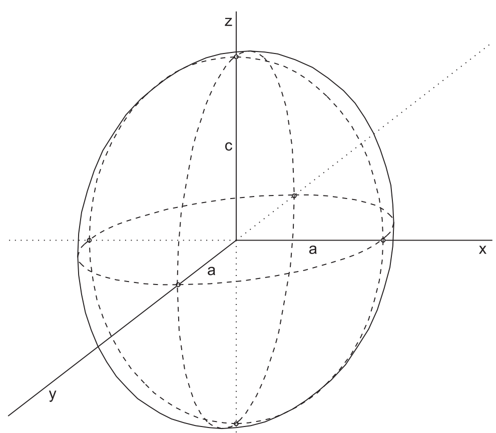
Speciálním případem je *rotační elipsoid,* jehož dvě osy mají stejnou délku.

Jestliže $a = b > c$, potom se elipsoid nazývá *zploštělý rotační elipsoid* s osou rotace z.



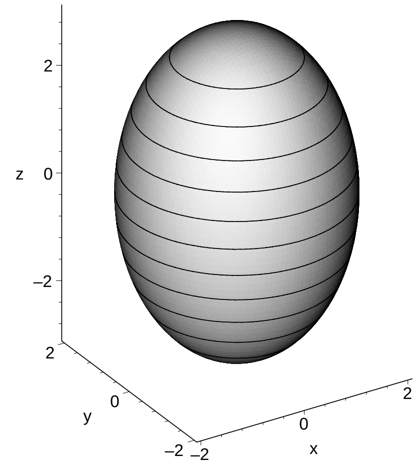
Obrázek 2.3: Zploštělý rotační elipsoid

Jestliže $a = b < c$, potom se jedná o *vejčitý (protáhlý) rotační elipsoid* s osou



Obrázek 2.4: Vejčitý rotační elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

rotace v ose z, obr. 2.4.



Obrázek 2.5: Vejčitý rotační elipsoid

Pokud $a = b = c = r$, potom se tato plocha nazývá *kulová plocha* o poloměru r. Její rovnice je

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Kulová plocha má mnoho zajímavých vlastností a je skutečnou "královnou" mezi plochami. Jednou z vlastností je tzv. *izoperimetrická vlastnost* kulové plochy:
"Mezi všemi konvexními plochami o daném povrchu má kulová plocha největší objem".
Této vlastnosti se využívá např. při výrobě nádrží, obalů apod.

Obrázek 2.6: Mýdlové bubliny svým tvarem potvrzují *izoperimetrickou vlastnost* kulové plochy (zdroj obrázku: http://www.google.cz, bubbles.jpg)

Kvadratická plocha, jejíž rovnice je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \ , \tag{2.3}$$

se nazývá *imaginární elipsoid.* Jedná se o regulární kvadriku, která, jak vidíme z rovnice (2.3), neobsahuje žádný reálný bod.

2.2 Hyperboloidy

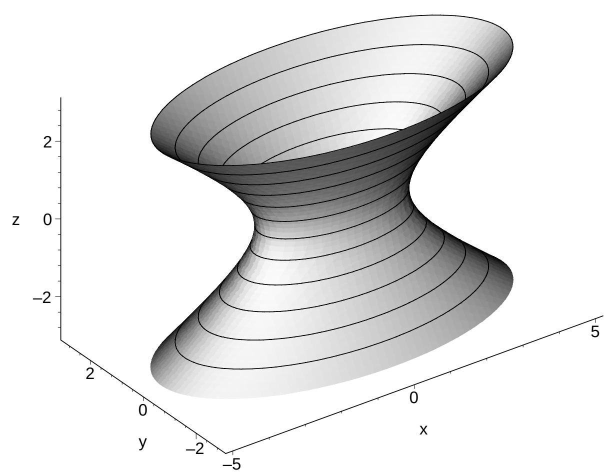
Hyperboloidy patří společně s elipsoidy mezi středové regulární kvadriky. Vlastní čísla jsou nenulová a mají, na rozdíl od elipsoidů, *různá* znaménka. Rozlišujeme dva druhy hyperboloidů — jednodílný a dvojdílný. Nejprve se budeme věnovat jednodílnému hyperboloidu.

2.2.1 Jednodílný hyperboloid

Jednodílný hyperboloid má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.4}$$

Kladná čísla a, b, c jsou délky os hyperboloidu.



Obrázek 2.7: Jednodílný hyperboloid

Souřadnicová rovina $x = 0$ protíná hyperboloid (2.4) v hyperbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2.5}$$

jak plyne dosazením $x = 0$ do rovnice (2.4). Analogicky, rovina $y = 0$ protne hyperboloid v hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2.6}$$