

Kvadratická plocha, jejíž rovnice je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (2.3)$$

se nazývá *imaginární elipsoid*. Jedná se o regulární kvadriku, která, jak vidíme z rovnice (2.3), neobsahuje žádný reálný bod.

2.2 Hyperboloidy

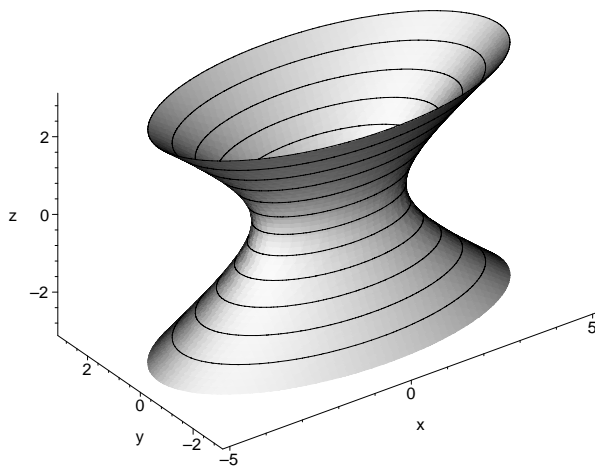
Hyperboloidy patří společně s elipsoidy mezi středové regulární kvadriky. Vlastní čísla jsou nenulová a mají, na rozdíl od elipsoidů, *různá* znaménka. Rozlišujeme dva druhy hyperboloidů — jednoduchý a dvojdílný. Nejprve se budeme věnovat jednoduchému hyperboloidu.

2.2.1 Jednoduchý hyperboloid

Jednoduchý hyperboloid má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.4)$$

Kladná čísla a, b, c jsou délky os hyperboloidu.



Obrázek 2.7: Jednoduchý hyperboloid

Souřadnicová rovina $x = 0$ protíná hyperboloid (2.4) v hyperbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.5)$$

jak plyne dosazením $x = 0$ do rovnice (2.4). Analogicky, rovina $y = 0$ protne hyperboloid v hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.6)$$

Vezmeme-li místo roviny $x = 0$ rovinu s ní rovnoběžnou $x = k$, kde k je nějaká reálná konstanta, potom pro $|k| < a$ je průnikem roviny $x = k$ a hyperboloidu (2.4) hyperbola, která je podobná hyperbole (2.5). Je-li $|k| > a$ dostaneme hyperbolu, která je podobná hyperbole

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.7)$$

Pro hodnotu $k = a$ protíná rovina $x = a$ hyperboloid (2.4) v křivce o rovnici

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (2.8)$$

která vyjadřuje dvě různoběžky

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0.$$

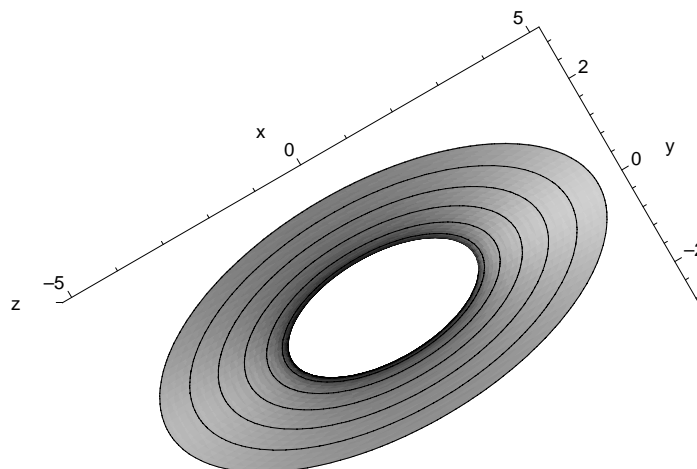
Rovina $x = a$ je tečnou rovinou a bod $[a, 0, 0]$ je jejím bodem dotyku. Obdobně rovina $x = -a$ je tečnou rovinou hyperboloidu v bodě dotyku $[-a, 0, 0]$.

Analogický výsledek dostaneme pro rovinu $y = k$, která je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou $y = 0$.

Třetí souřadnicová rovina $z = 0$ protne hyperboloid v elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.9)$$

Tato elipsa se někdy nazývá *hrdlová elipsa* či zkráceně *hrdlo*.

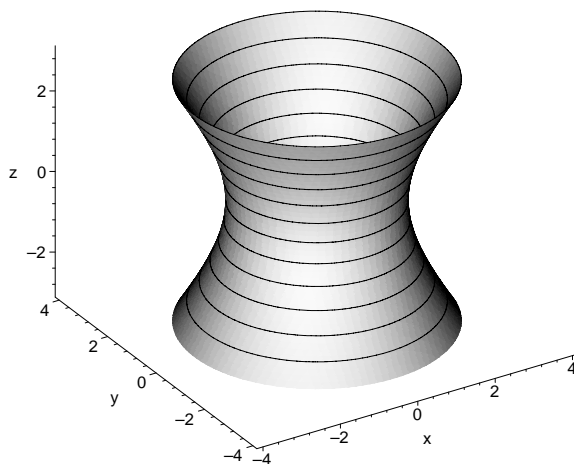


Obrázek 2.8: Hrdlová elipsa (hrdlo)

Roviny $z = k$, které jsou rovnoběžné s rovinou $z = 0$, protínají hyperboloid (2.4) pro libovolné k v elipsách, které jsou podobné elipse (2.9).

Speciálním případem hyperboloidu (2.4) je *rotační jednodílný hyperboloid*, pro

jehož délky os platí $a = b$. Takový hyperboloid vznikne rotací hyperboly kolem *vedlejší osy*.

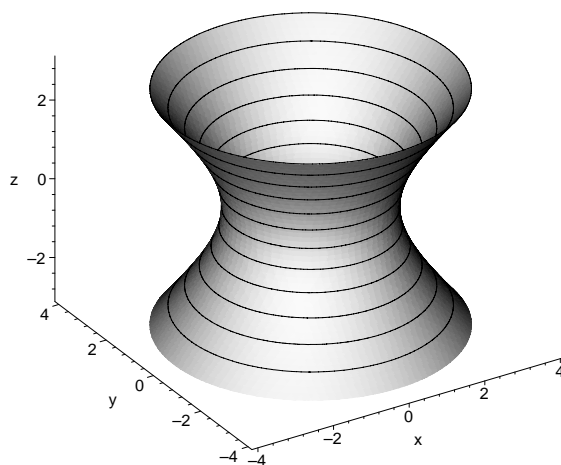


Obrázek 2.9: Rotační jednodílný hyperboloid

Hyperboloid, jehož rovnice je

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2,$$

se nazývá *rovnoosý* rotační jednodílný hyperboloid. Zde jsme označili $a = b = c = r$. Jeho řezy rovinami, které procházejí osou rotace z , jsou rovnoosé hyperboly.



Obrázek 2.10: Rovnoosý rotační jednodílný hyperboloid

Jednodílný hyperboloid má několik důležitých vlastností, pro které se využívá např. ve stavebnictví, strojírenství apod. Jednou z těchto vlastností je, že se jedná o *přímkovou plochu*, tj. o plochu, kterou lze sestavit pouze z přímek.



Obrázek 2.11: Chladicí věže jaderné elektrárny v Temelíně - rotační jednodílné hyperboloidy

Ukážeme, že jednodílný hyperboloid, jehož rovnice je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.10)$$

je přímková plocha.

Abychom to dokázali, vyjádříme rovnici (2.10) ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}. \quad (2.11)$$

Všimněte si, že ve vztahu (2.11) jsou obě strany rovnice ve tvaru rozdílu čtverců a místo (2.10) můžeme tedy psát

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right). \quad (2.12)$$

Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \beta \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \alpha \left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

kde α, β jsou reálná čísla, která nejsou současně rovna nule.

Pro pevná α, β vyjadřuje soustava (2.13) přímku, neboť se jedná o průnik dvou rovin. Každé řešení (2.13) vyhovuje rovnici (2.12). To znamená, že každá přímka (2.13), kde α, β probíhají všechna reálná čísla, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, vyhovuje kvadrice (2.10). Platí věta:

Věta: Každým bodem $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ kvadriky (2.4) prochází právě jedna přímka plochy daná soustavou (2.13).

Důkaz: K danému bodu $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ plochy (2.10) najdeme koeficienty α, β , kterými je určena přímka (2.13) plochy, procházející bodem X_0 .

Rovnice přímky (2.13) přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned}\beta : \alpha &= \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) : \left(1 + \frac{y_0}{b} \right) \\ \beta : \alpha &= \left(1 - \frac{y_0}{b} \right) : \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right),\end{aligned}\quad (2.14)$$

přičemž zároveň platí

$$\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) : \left(1 + \frac{y_0}{b} \right) = \left(1 - \frac{y_0}{b} \right) : \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right). \quad (2.15)$$

Ze vztahů (2.14), vzhledem k rovnosti (2.15), vidíme, že hodnota poměru $\beta : \alpha$ je dána např. první rovnicí v (2.14). Jestliže současně $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = 0$ a $1 + \frac{y_0}{b} = 0$, tj. není-li poměr $\beta : \alpha$ definován, potom hodnotu $\beta : \alpha$ určíme z druhé rovnice v (2.14). Pokud totiž $1 + \frac{y_0}{b} = 0$, potom je vždy $1 - \frac{y_0}{b} \neq 0$.

Ukázali jsme, že bodem $[x_0, y_0, z_0]$ kvadriky (2.4) prochází právě jedna přímka plochy daná soustavou (2.13). \square

Snadno se ukáže, že se žádné dvě přímky soustavy (2.13) neprotínají. Pokud by se přímky protínaly v bodě Y_0 , potom by bodem Y_0 , který je bodem plochy, protože obě přímky na ploše leží, procházely dvě přímky soustavy (2.13), a to je spor s předchozí větou.

Obdobně se ukáže, že žádné dvě přímky soustavy (2.13) nejsou rovnoběžné. Všechny přímky soustavy (2.13) jsou tedy navzájem mimoběžné.

Množinu všech přímek soustavy (2.13) nazveme 1. *regulus*.

Analogicky dostaneme z vyjádření (2.12) soustavu

$$\begin{aligned}\alpha' \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) &= \beta' \left(1 - \frac{y}{b} \right) \\ \beta' \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) &= \alpha' \left(1 + \frac{y}{b} \right),\end{aligned}\quad (2.16)$$

kde α', β' probíhají všechna reálná čísla, s výjimkou případu $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$. Pro pevná α', β' představují rovnice (2.16) přímku. Každé řešení soustavy (2.16) vyhovuje rovnici kvadriky (2.10). Platí věta analogická předchozí větě:

Věta: Každým bodem $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ kvadriky (2.10) prochází právě jedna přímka soustavy (2.16).

Množinu všech přímek soustavy (2.16) nazveme 2. *regulus*.

Výsledky obou předchozích vět můžeme shrnout do následující věty:

Věta: Na kvadrice (2.10) existují dva reguly přímek dané soustavami (2.13), (2.16). Každým bodem kvadriky (2.10) prochází právě jedna přímka 1. regulu

a právě jedna přímka 2. regulu.

Ještě ukážeme následující vlastnost přímek z různých regulů:

Věta: Každá přímka jednoho regulu protíná všechny přímky druhého regulu.

Důkaz: Libovolnou přímku 1. resp. 2. regulu můžeme zadat, položíme-li $\beta : \alpha = u$ resp. $\beta' : \alpha' = v$, kde u, v jsou nějaká reálná čísla. Podle (2.13) a (2.16) potom platí

$$\begin{aligned} u\left(1 + \frac{y}{b}\right) &= \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= 1 - \frac{y}{b} \\ v\left(1 - \frac{y}{b}\right) &= \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= 1 + \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Snadno se přesvědčíme, že soustava (2.17), která se skládá ze čtyř rovnic o třech neznámých x, y, z , má jediné řešení

$$x = a \cdot \frac{uv + 1}{u + v}, \quad y = b \cdot \frac{v - u}{u + v}, \quad z = c \cdot \frac{uv - 1}{u + v} \quad (2.18)$$

a přímky se protínají v jednom bodě. Jestliže $u = -v$ v (2.18), potom jsou přímky (2.13), (2.16) rovnoběžné (a mají společný jediný nevlastní bod). To nahlédneme takto:

Přímka daná prvními dvěma rovnicemi soustavy (2.17) má směr \mathbf{u} , který je kolmý na normálové vektory obor rovin, tj.:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{a}, \frac{-u}{b}, \frac{1}{c}\right) \times \left(\frac{u}{a}, \frac{1}{b}, \frac{-u}{c}\right) = \left(\frac{u^2 - 1}{bc}, \frac{2u}{ac}, \frac{u^2 + 1}{ab}\right). \quad (2.19)$$

Analogicky, druhá přímka, která je dána třetí a čtvrtou rovnicí v (2.17), má směr \mathbf{v} , pro který platí:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{a}, \frac{v}{b}, \frac{1}{c}\right) \times \left(\frac{v}{a}, \frac{-1}{b}, \frac{-v}{c}\right) = \left(\frac{-v^2 + 1}{bc}, \frac{2v}{ac}, \frac{-v^2 - 1}{ab}\right). \quad (2.20)$$

Z (2.19) a (2.20) vidíme, že pro $v = -u$ jsou směry \mathbf{u} a \mathbf{v} rovnoběžné.

Příklad:

Ukažte, že rotací přímky kolem osy, která je s přímkou mimoběžná, vznikne rotační jednodílný hyperboloid.

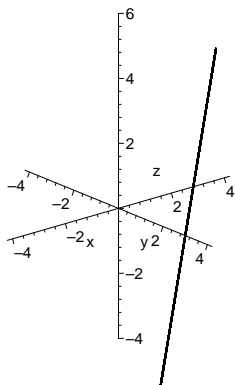
Řešení: Osu rotace zvolme v ose z . Přímka p , která bude rotovat okolo osy z , nechť má rovnici

$$p : X = P + t\mathbf{u}. \quad (2.21)$$

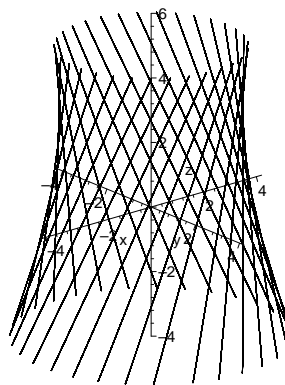
Bez újmy na obecnosti můžeme volit $P = [0, a, 0]$, kde $a \neq 0$, $\mathbf{u} = (u, 0, w)$, kde $u \neq 0$, $w \neq 0$. Přímku (2.21) vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= 0 + t \cdot u \\ y &= a + t \cdot 0 \\ z &= 0 + t \cdot w . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pevně zvolenému parametru t je přiřazen jediný bod $X = [x, y, z]$, daný



Obrázek 2.12: Přímka

Obrázek 2.13: Rotace přímky kolem osy z

rovnicemi (2.22). Při tomto pevně zvoleném t se při rotaci přímky p kolem osy z , pohybuje bod X po kružnici, která leží v rovině rovnoběžné se souřadnicovou rovinou $z = 0$, která má rovnici

$$x^2 + y^2 = t^2 u^2 + a^2, \quad (2.23)$$

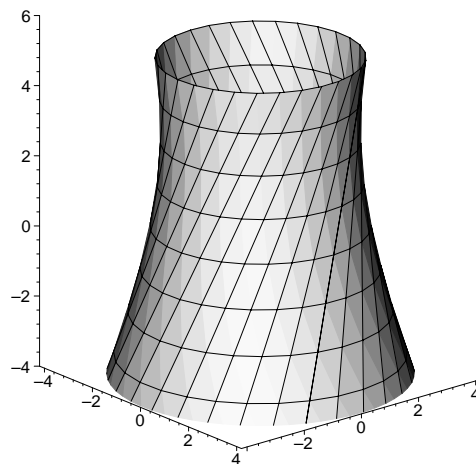
jak plyne z prvních dvou rovnic v (2.22). Ze třetí rovnice v (2.22) vyjádříme parametr t , pro který $t = \frac{z}{w}$ a dosadíme jej do vztahu (2.23). Dostaneme

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{w^2} u^2 + a^2, \quad (2.24)$$

což po úpravě dává

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.25)$$

kde jsme označili $c = wa/u$. Rovnice (2.25) je rovnicí rotačního jednodílného hyperboloidu s délkami os a, a, c . \square



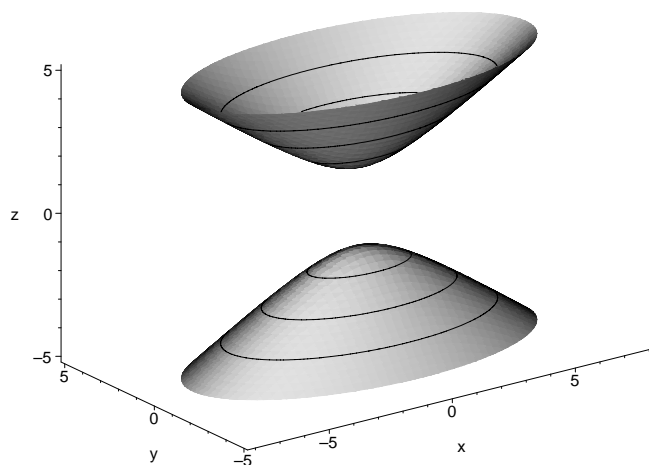
Obrázek 2.14: Výsledný rotační jednodílný hyperboloid (kód řešení v Maple viz str. 111)

2.2.2 Dvojdílný hyperboloid

Dvojdílný hyperboloid má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (2.26)$$

kde kladná čísla a, b, c jsou délky os hyperboloidu, obr. 2.16.



Obrázek 2.15: Dvojdílný hyperboloid

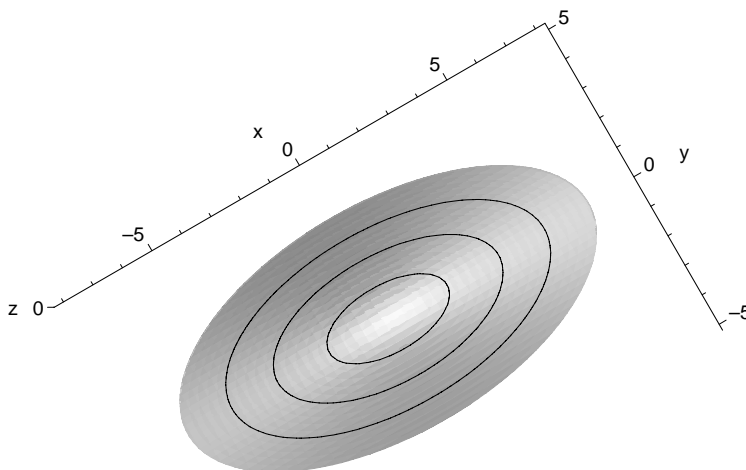
Kanonická rovnice (2.26) dvojdílného hyperboloidu se liší od rovnice (2.4) jednodílného hyperboloidu pouze znaménkem konstanty na první straně rovnice. Z rovnice (2.26) můžeme vidět, že souřadnicová rovina $z = 0$ hyperboloid

neprotíná. Průnikem je totiž křivka o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

které nevyhovuje žádný reálný bod. Pokud místo roviny $z = 0$ vezmeme rovinu s ní rovnoběžnou $z = k$, potom pro $|k| > c$ dostaneme elipsu, která je podobná elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.27)$$



Obrázek 2.16: Dvojdílný hyperboloid (2.26) - pohled ve směru osy z

Pro $|k| < c$ rovina $z = k$ kvadriku neprotíná, pro $k = c$ nebo $k = -c$ dostaneme *vrcholy* kvadriky $[0, 0, c]$ nebo $[0, 0, -c]$.

Rovina $x = k$ protíná hyperboloid v hyperbole, která je podobná hyperbole

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.28)$$

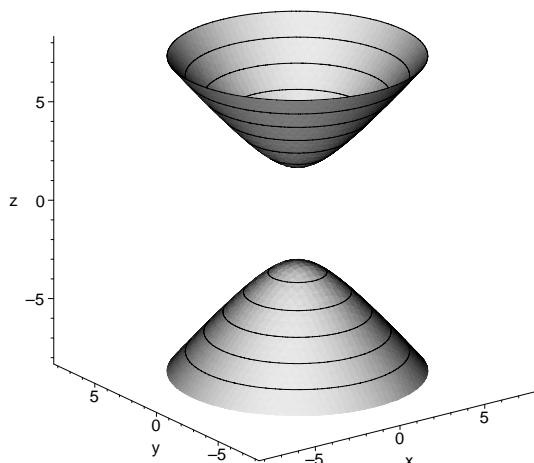
Obdobně rovina $y = k$ protíná hyperboloid (2.26) pro každou hodnotu k v hyperbole, která je podobná hyperbole

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.29)$$

Z našich úvah plyne, že dvojdílný hyperboloid (2.26) se skládá ze dvou částí, které odděluje např. rovina $z = 0$.

Speciálním případem je *rotační dvojdílný hyperboloid*, pro který $a = b$. Jeho rovnice je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (2.30)$$



Obrázek 2.17: Rotační dvojdílný hyperboloid

Rotační dvojdílný hyperboloid dostaneme rotací hyperboly kolem *hlavní* osy. Položíme-li $a = b = c = r$ potom rovnice

$$x^2 + y^2 - z^2 = -r^2$$

vyjadřuje *rovnoosý rotační dvojdílný hyperboloid*.

Poznámka:

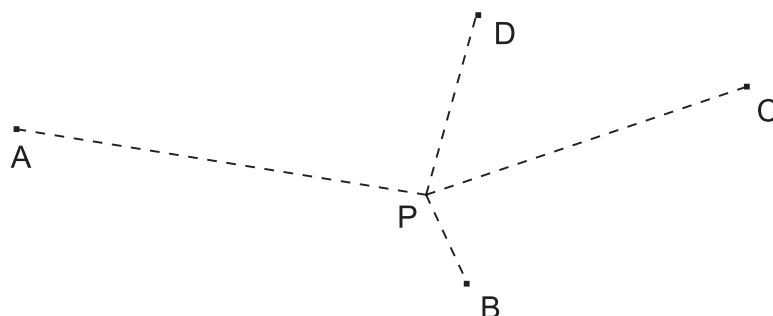
Dvojdílný hyperboloid není na rozdíl od jednodílného hyperboloidu přímková plocha. Z tohoto důvodu by se mohlo zdát, že využití dvojdílného hyperboloidu v praxi není tak časté. Opak je však pravdou. Rotační dvojdílný hyperboloid hraje zásadní úlohu při použití GPS (Global Positioning System) — systému, pomocí kterého dovedeme zjistit naši přesnou polohu na Zemi [3]. Jedná se o zobecnění zvukoměřičské úlohy v rovině, při níž využíváme vlastnosti hyperboly, viz [4].

Princip GPS je následující, obr. 2.18:

Ve čtyřech různých místech A, B, C, D v prostoru byl zaznamenán signál po řadě v časech t_1, t_2, t_3, t_4 . Určete místo zdroje signálu.

Předpokládejme, že platí $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$. V místě A byl signál zaznamenán nejdříve, v místě B se zpožděním $t_2 - t_1$ sekund vůči místu A . Označíme-li v rychlost šíření signálu, je zdroj signálu X o $(t_2 - t_1) \cdot v$ metrů dál od místa B než od místa A . Pro *rozdíl* vzdáleností $|XB| - |XA|$ platí $|XB| - |XA| = (t_2 - t_1)v$ a zdroj signálu X tedy leží na dvojdílném rotačním hyperboloidu, jehož ohniska jsou v bodech A, B a vzdálenost jeho vrcholů je rovna $(t_2 - t_1)v$. Uvažujeme pouze ten díl hyperboloidu, který je blíže bodu A .

Obdobně zjistíme polohu zdroje signálu X vzhledem k bodům B, C . Pro vzdálenosti $|XB|, |XC|$ platí $|XC| - |XB| = (t_3 - t_2)v$ a bod X leží na dvojdílném



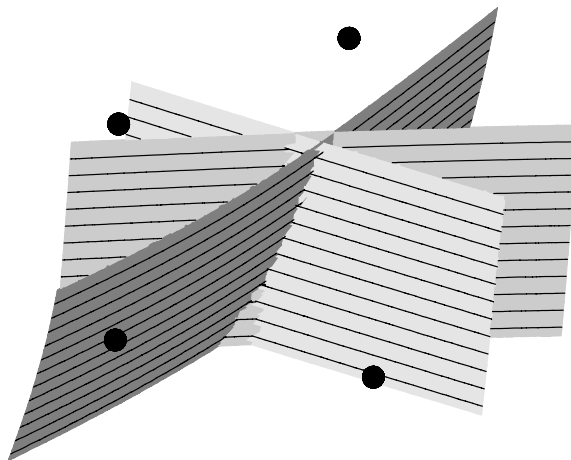
Obrázek 2.18:

rotačním hyperboloidu, jehož ohniska jsou v bodech B, C a vzdálenost jeho vrcholů je rovna $(t_3 - t_2)v$. Uvažujeme pouze ten díl hyperboloidu, který je blíže bodu B .

Analogicky, množina bodů X , jejichž rozdíl vzdáleností od bodů C, D je roven $|XC| - |XD| = (t_4 - t_3)v$, je dvojdílný rotační hyperboloid, jehož ohniska jsou v bodech C, D a vzdálenost jeho vrcholů je rovna $(t_4 - t_3)v$. Uvažujeme pouze ten díl hyperboloidu, který je blíže bodu C .

Zdroj signálu X tedy musí ležet v průniku *tří* shora zmíněných hyperboloidů. Uvážíme-li, že dva hyperboloidy se protínají v prostorové křivce, potom průnik tří hyperboloidů je roven průniku prostorové křivky s hyperboloidem.

Je zřejmé, že výpočet celé procedury je velmi složitý, a není prakticky proveditelný bez použití počítače.



Obrázek 2.19: Ilustrace principu GPS - určení polohy jako společného bodu tří hyperboloidů