2.3 Paraboloidy

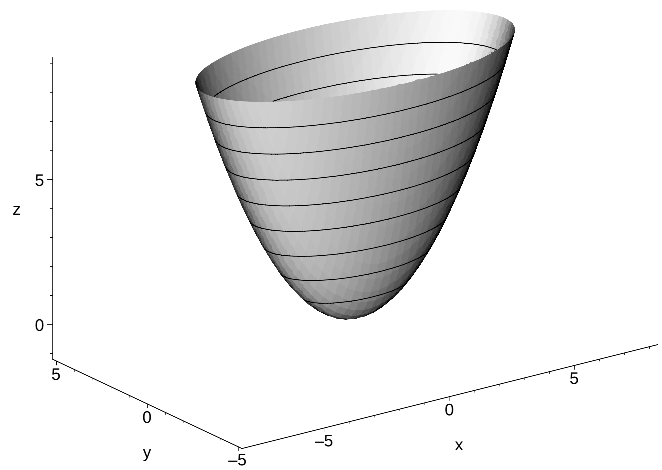
Paraboloidy jsou regulární kvadriky, jejichž charakteristická rovnice má jedno nulové a dvě nenulová řešení. Mají-li obě nenulová řešení stejná znaménka, jedná se o eliptický paraboloid, jsou-li znaménka různá, hovoříme o hyperbolickém paraboloidu.

2.3.1 Eliptický paraboloid

Eliptický paraboloid je kvadrika, která má v nějaké kartézské soustavě souřadnic rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{2.31}$$

Kladná čísla a, b jsou délky os eliptického paraboloidu.



Obrázek 2.20: Eliptický paraboloid (2.31)

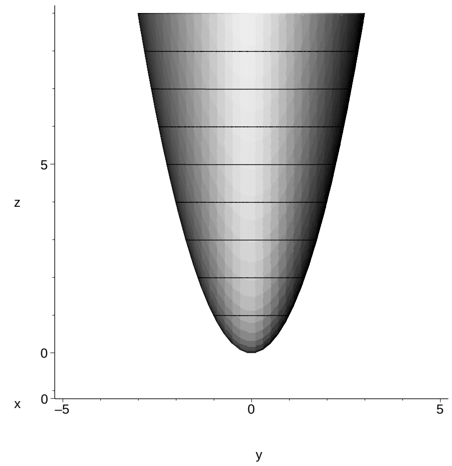
Rovina $x = 0$ protíná kvadriku (2.31) v parabole

$$y^2 = 2b^2 z, \tag{2.32}$$

jak zjistíme přímým dosazením $x = 0$ do (2.31). Pro libovolné k protíná rovina $x = k$ kvadriku (2.31) v parabole

$$y^2 = 2b^2 z - b^2 \frac{k^2}{a^2},$$

která je shodná s parabolou (2.32).

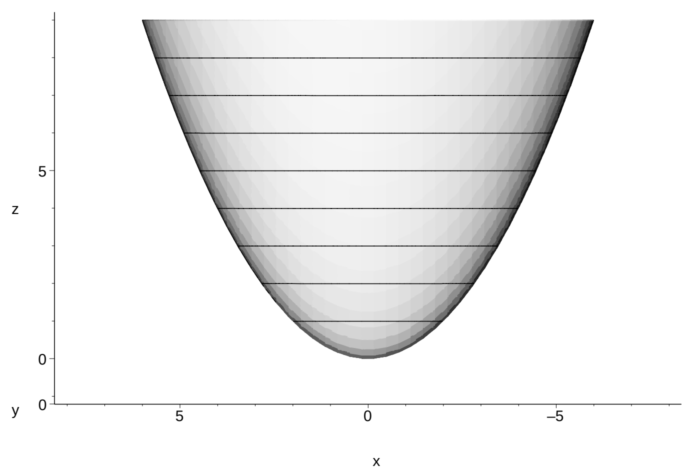


Obrázek 2.21: Eliptický paraboloid (2.31) - pohled ve směru osy x

Analogicky, souřadnicová rovina $y = 0$ protíná paraboloid v parabole

$$x^2 = 2a^2 z. \tag{2.33}$$

Rovina $y = k$, kde k je nějaké reálné číslo, která je rovnoběžná s rovinou $y = 0$, protíná paraboloid v parabole shodná s parabolou (2.33). Můžeme říci, že roviny rovnoběžné s hlavní rovinou $y = 0$ protínají paraboloid ve shodných parabolách, jejichž osy leží v hlavní rovině $x = 0$.



Obrázek 2.22: Eliptický paraboloid (2.31) - pohled ve směru osy y

Konečně souřadnicová rovina $z = 0$ protíná kvadriku (2.31) v jediném bodě $[0, 0]$ — ve *vrcholu* paraboloidu. Pro $k > 0$ protíná rovina $z = k$ paraboloid v elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2k,$$

je-li $k < 0$, rovina $z = k$ paraboloid neprotíná.

Jestliže $a = b$ v rovnici (2.31) eliptického paraboloidu, potom kvadriku nazýváme *rotační paraboloid*.

Rotační paraboloid se v praxi používá k různým účelům jako parabolické zrcadlo, pomocí kterého:

a) paprsky různých směrů vycházející z určitého zdroje, dovedeme usměrnit do jediného směru,

či naopak,

b) rovnoběžné paprsky umíme soustředit do jediného bodu.

Parabolické zrcadlo se podle a) využívá v reflektorech a svítilnách, ve vysílačích apod. Všude, kde je zapotřebí paprsky různých směrů soustředit do *jediného* směru.

Obrázek 2.23: Tradiční ceremoniál zažehnutí olympijské pochodně pomocí slunečních paprsků soustředěných parabolickým zrcadlem. Řecká Olympie, rok 2004 (http://www.tribuneindia.com/2004/20040325/sports.htm).

Vlastnosti rotačního paraboloidu podle b) využíváme při konstrukci parabolických antén pro příjem televizního nebo rádiového signálu, při konstrukci slunečních elektráren aj. Všude, kde je nutné soustředit svazek rovnoběžných paprsků (např. sluneční záření) do jediného bodu. Říká se, že Archimédes chtěl pomocí soustavy zrcadel umístěných ve tvaru paraboloidu zapálit nepřátelské lodě.

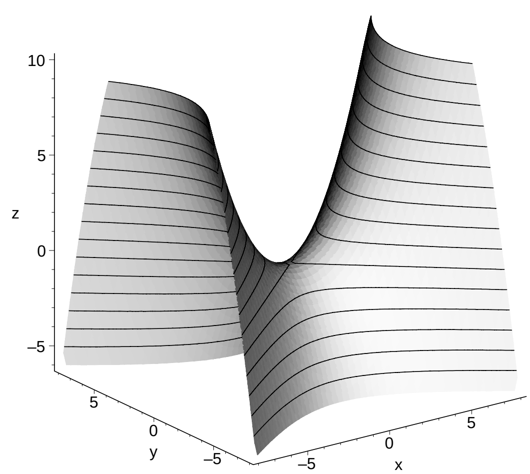
Obrázek 2.24: Nejrozsířenější satelitní anténa, tzv. „offsetová parabola“. Jedná se o výřez z plochy rotačního paraboloidu tak, aby přijímač v ohnisku (LNB konvertor) stál co nejméně v cestě dopadajícího signálu (http://www.digizone.cz/).

2.3.2 Hyperbolický paraboloid

Hyperbolický paraboloid je kvadrika, jejíž rovnice v nějaké kartézské soustavě souřadnic je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{2.34}$$

Kladná čísla a, b jsou délky os hyperbolického paraboloidu.



Obrázek 2.25: Hyperbolický paraboloid (2.34)

Souřadnicová rovina $x = 0$ protíná hyperbolický paraboloid (2.34) v parabole

$$-y^2 = 2b^2 z. \tag{2.35}$$

Rovina $x = k$ protíná kvadriku (2.34) v parabole, která je shodná s parabolou (2.35).
Souřadnicová rovina $y = 0$ protíná kvadriku v parabole

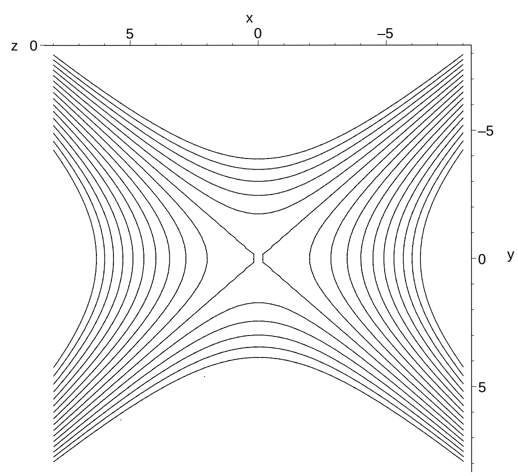
$$x^2 = 2a^2 z. \tag{2.36}$$

Všimněte si, že parabola (2.36) je opačně orientovaná než parabola (2.35).
Rovina $y = k$ protíná pro libovolné k paraboloid v parabole, která je shodná s parabolou (2.36).
Z našich úvah plyne možnost vytvoření plochy (2.34) ze systému shodných parabol ležících v rovinách rovnoběžných s hlavní rovinou $x = 0$, které mají vrchol na parabole, která leží v hlavní rovině $y = 0$.
Třetí souřadnicová rovina $z = 0$ protíná paraboloid ve dvojici různoběžek

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0. \tag{2.37}$$

Rovina $z = 0$ je tečnou rovinou kvadriky (2.34) v bodě dotyku $[0, 0]$ — *vrcholu* plochy. Tento bod také nazýváme *sedlovým* bodem plochy (2.34).[1] Rovina $z = k$ protíná plochu v hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2k \tag{2.38}$$



Obrázek 2.26: Hyperbolický paraboloid (2.34) - pohled ve směru osy z

Opět si všimněme, že pro $k > 0$ jsou hyperboly opačně orientované oproti hyperbolám, které dostaneme pro $k < 0$.

Hyperbolický paraboloid je plocha, která je v praxi velmi hojně používána.

[1] Tvar plochy v okolí bodu $[0, 0]$ připomíná koňské sedlo.

Jednou z příčin proč tomu tak je, je skutečnost, že se jedná o přímkovou plochu. To nyní dokážeme:

Rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{2.39}$$

přepíšeme do ekvivalentního tvaru

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2 \cdot z. \tag{2.40}$$

Uvažujme soustavu dvou rovnic s reálnými parametry α, β

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) &= \beta z \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) &= 2\alpha, \end{aligned} \tag{2.41}$$

kde α, β nejsou současně rovna nule.
Pro každou dvojici α, β je řešením soustavy (2.41) přímka, neboť se jedná o průnik dvou rovin. Každé řešení soustavy (2.41) vyhovuje (vynásobíme-li spolu levé strany rovnic a pravé strany rovnic) rovnici (2.34). To znamená, že pro každé α, β přímka (2.41) leží na hyperbolickém paraboloidu. Platí věta:

Věta: *Každým bodem $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ plochy (2.34) prochází právě jedna přímka soustavy (2.41).*

Důkaz: Pro daný bod $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ potřebujeme nalézt hodnoty α, β, kterými je hledaná přímka určena. V bodě $[x_0, y_0, z_0]$ plochy platí:

$$\begin{aligned} \beta : \alpha &= \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) : z_0 \\ \beta : \alpha &= 2 : \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right). \end{aligned} \tag{2.42}$$

a protože X_0 náleží ploše (2.34), je splněna rovnice

$$\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) : z_0 = 2 : \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right). \tag{2.43}$$

Odtud vidíme, díky (2.43), že stačí určit hodnotu podílu $\beta : \alpha$ např. z druhé rovnice v (2.42). Důkaz je proveden. □

Definice: *Množina všech přímek, které vyhovují soustavě (2.41) pro všechna α, β, která nejsou současně rovna nule, se nazývá* 1. *regulus plochy (2.34).*

Každé dvě přímky 1. regulu jsou mimoběžné. Pokud by se totiž protínaly v nějakém bodě X, potom by bodem X, který leží na ploše, procházely dvě přímky 1. regulu, a to je spor s předcházející větou.

Na hyperbolickém paraboloidu existuje ještě jeden regulus přímek. Záměnou členů v (2.41) získáme následující soustavu

$$\begin{aligned} \alpha'\Big(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\Big) &= 2\beta \\ \beta'\Big(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\Big) &= \alpha z, \end{aligned} \tag{2.44}$$

kde α', β' jsou libovolná reálná čísla, která nejsou současně rovna nule.

Množina všech přímek, které jsou řešením soustavy (2.44) leží na kvadrice (2.34) a tvoří tak 2. *regulus* přímek plochy.
Obdobně se ukáže, že každým bodem plochy (2.34) prochází jediná přímka 2. regulu. Všechny přímky 2. regulu jsou navzájem mimoběžné.
Výsledky shrneme do následující věty:

Věta: *Na kvadrice (2.34) existují dva reguly přímek dané soustavami (2.41), (2.44). Každým bodem kvadriky (2.34) prochází právě jedna přímka* 1. *regulu a právě jedna přímka* 2. *regulu.*

Přímky z různých regulů hyperbolického paraboloidu se vzájemně protínají. Platí věta:

Věta: *Každá přímka jednoho regulu protíná všechny přímky druhého regulu.*

Důkaz: Uvažujme libovolnou přímku 1. regulu, která odpovídá hodnotě $u = \beta/\alpha$ v soustavě (2.41) a libovolnou přímku 2. regulu, která odpovídá hodnotě $v = \beta'/\alpha'$ v soustavě (2.44). Dostaneme soustavu čtyř rovnic

$$\begin{aligned} uz &= \frac{x}{a}+\frac{y}{b} \\ u\Big(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\Big) &= 2, \\ 2v &= \frac{x}{a}+\frac{y}{b} \\ v\Big(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\Big) &= z \end{aligned} \tag{2.45}$$

o třech neznámých x, y, z, která má jediné řešení

$$x = a\cdot\frac{v+1}{u}, \quad y = b\cdot\frac{v-1}{u}, \quad z = 2\cdot\frac{v}{u}.$$

Věta je dokázána. □

Ještě ukážeme, že všechny přímky jednoho regulu jsou rovnoběžné s rovinou. Libovolná přímka, která je řešením soustavy (2.41), kterou můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} uz &= \frac{x}{a}+\frac{y}{b} \\ u\Big(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\Big) &= 2, \end{aligned} \tag{2.46}$$

kde $u = \beta/\alpha$, má směrový vektor

$$\Big(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -u\Big) \times \Big(\frac{u}{a}, \frac{-u}{b}, 0\Big) = \Big(\frac{-u^2}{b}, \frac{-u^2}{a}, \frac{-2u}{ab}\Big),$$

který určuje stejný směr jako vektor

$$\Big(a, b, \frac{2}{u}\Big). \tag{2.47}$$

Z vyjádření (2.47) vidíme, že směrový vektor každé přímky 1. regulu má prvé dvě souřadnice konstantní a je tedy rovnoběžný s např. s rovinou

$$bx - ay = 0. \tag{2.48}$$

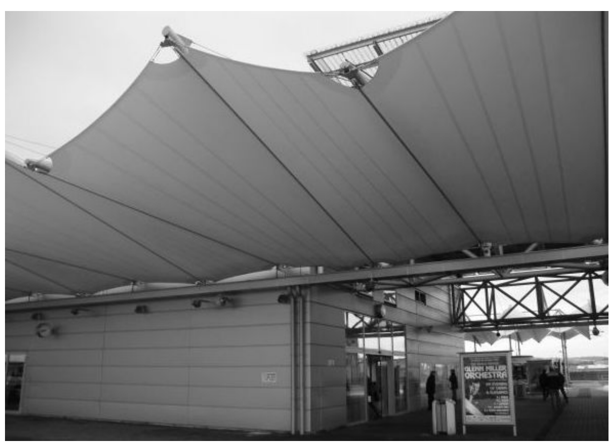
Analogicky, přímky 2. regulu jsou rovnoběžné s rovinou

$$bx + ay = 0. \tag{2.49}$$

Výsledek můžeme zformulovat do následující věty:

Věta: *Všechny přímky* 1. *regulu jsou rovnoběžné s rovinou (2.48), všechny přímky* 2. *regulu jsou rovnoběžné s rovinou (2.49).*

Uvedených vlastností soustav přímek hyperbolického paraboloidu se využívá ve stavebnictví. Z hlediska stavbně technické praxe se přímková plocha jeví jako vhodná plocha pro různé konstrukce. Často se hyperbolický paraboloid používá k zastřešení prostoru ve tvaru prostorového čtyřúhelníku, který vzniká při zástavbě proluk mezi domy.

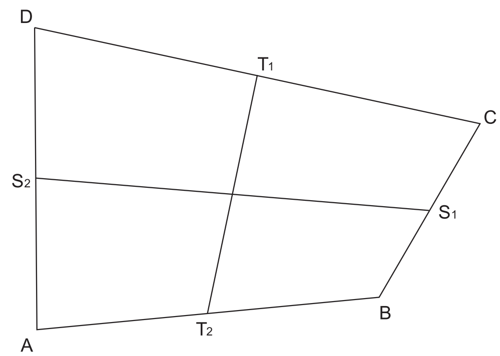


Obrázek 2.27: Detail hyperbolických paraboloidů užitých jako prvky zastřešení na autobusovém nádraží v Českých Budějovicích (pořízeno s laskavým svolením správy Mercury centra)

Ukážeme si, jakým způsobem se zastřešení provádí.

Příklad:
V daném prostorovém čtyřúhelníku $ABCD$, který leží na hyperbolického paraboloidu sestrojte přímky 1. a 2. regulu, obr. 2.28, 2.29.

Řešení: Především je zapotřebí si uvědomit, že čtyřmi přímkami AB, BC, CD, DA, v prostoru je zadán hyperbolický paraboloid. Dva páry mimoběž-



Obrázek 2.28: Konstrukce hyperbolického paraboloidu nad prostorovým čtyřúhelníkem $ABCD$

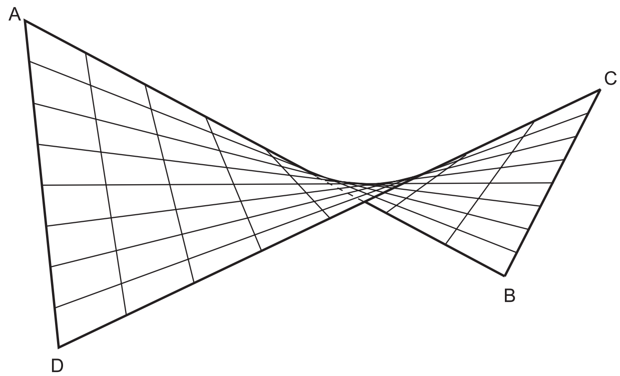
ných přímek AB, CD a BC, AD se navzájem protínají v bodech A, B, C, D a vytváří tak základ 1. a 2. regulu hyperbolického paraboloidu.
K tomu, abychom nalezli další přímku 1. regulu, který je určen mimoběžkami AB, CD, si uvědomíme, že tato přímka musí protínat všechny přímky 2. regulu, to znamená i mimoběžky BC, AD a zároveň musí být rovnoběžná s rovinou, se kterou jsou rovnoběžné přímky AB, CD. Protože každým bodem hyperbolického paraboloidu procházejí právě dvě přímky, lze daným bodem X přímky AD vést jedinou přímku, která má shora uvedené vlastností.
Obvykle postupujeme tak, že spojíme středy úseček BC, AD. Tato spojnice náleží do 1. regulu, neboť protíná přímky BC a AD a je rovnoběžná s rovinou, se kterou jsou rovnoběžné přímky AB, CD. To nahlédneme z této úvahy.
Označíme-li S_1, S_2 po řadě středy úseček BC, AD, potom

$$S_1 = \frac{1}{2}(B + C), \qquad S_2 = \frac{1}{2}(A + D)$$

a odtud

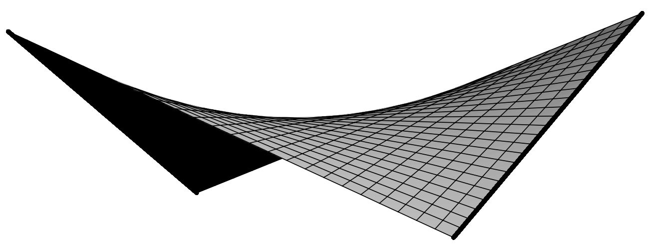
$$S_1 - S_2 = \frac{1}{2}(B - A) + \frac{1}{2}(C - D). \tag{2.50}$$

Směrový vektor $S_1 - S_2$ přímky S_1S_2 je podle (2.50) lineární kombinací vektorů $B - A$, a $C - D$. Tedy přímka S_1S_2 je rovnoběžná s rovinou, jejíž zaměření je generováno vektory $B - A, C - D$.
Obdobně přímka T_1T_2, kde T_1, T_2 jsou středy úseček AB, CD, je přímkou 2.



Obrázek 2.29: Hyperbolický paraboloid nad prostorovým čtyřúhelníkem $ABCD$

regulu hyperbolického paraboloidu.
Dále postupujeme stejným způsobem. Další přímka 1. regulu je spojnice středů úseček BS_1 a AS_2 atd. Rozdělením stran AB, CD na 2^n shodných dílů dostaneme spojením příslušných dělících bodů $2^n - 1$ příček.



Obrázek 2.30: Hyperbolický paraboloid v Maple (kód řešení viz str. 113)

Obrázek 2.31: Zastřešení budovy hyperbolickým paraboloidem - kampus *Claude Bernard University Lyon*