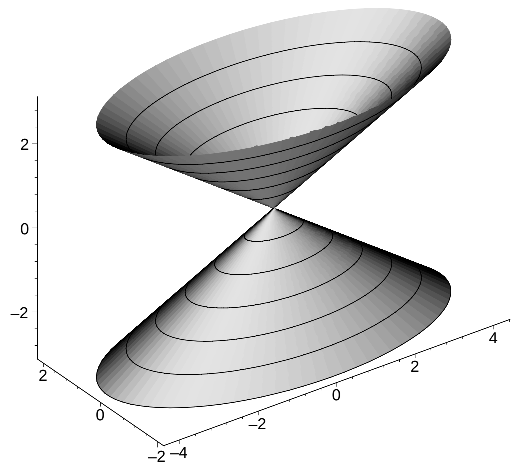
Válcová plocha, zvláště rotační, má široké použití v praxi — ve stavebnictví, v dopravě, v průmyslu apod.

2.5 Kuželová plocha

Kuželová plocha je středová singulární kvadrika, pro kterou platí $a_{44} = 0$. Kvadrika, která má ve vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{2.55}$$

se nazývá *kuželová plocha.* Bod $V = [0, 0, 0]$ je *vrchol* kuželové plochy.



Obrázek 2.36: Kuželová plocha

Rovina $z = k$, protíná pro $k \neq 0$ kuželovou plochu (2.55) v elipse, která je podobná elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.56}$$

Rovina $z = 0$ protne plochu (2.55) v jediném bodě — ve vrcholu $V = [0, 0, 0]$ kuželové plochy.
Rovina $x = k$ protíná kuželovou plochu pro libovolné $k \neq 0$ v hyperbole, která je podobná hyperbole

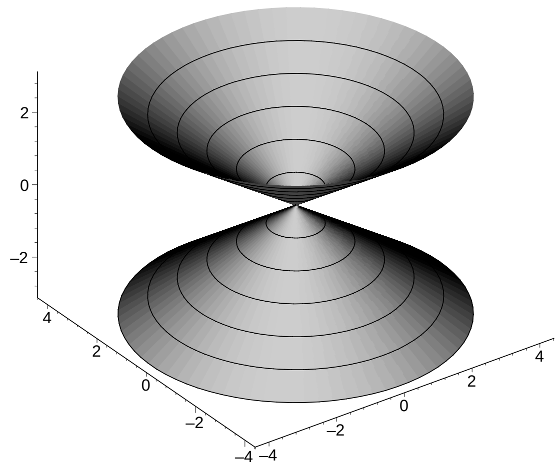
$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.57}$$

Průnik roviny $x = 0$ a kuželové plochy (2.55) je dvojice různoběžek

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0. \tag{2.58}$$

Obdobná situace nastane pro řezy rovinami $y = k$.
Jestliže $a = b$, potom se kvadrika (2.55) nazývá *rotační kuželová plocha.* Rotační kuželovou plochu dostaneme rotací přímky, která je různoběžná s osou

rotace z. Ukažme to.



Obrázek 2.37: Rotační kuželová plocha

Příklad:
Ukažte, že rotací přímky, která je různoběžná s osu rotace dostaneme rotační kuželovou plochu.

Řešení: Osu z umístíme do osy rotace. Předpokládejme, že přímka p prochází počátkem $V = [0, 0, 0]$ a její směrový vektor je $\mathbf{u} = (u, 0, w)$, kde $u \neq 0$, $w \neq 0$. Potom můžeme psát $p: \ X(t) = [ut, 0, wt]$ nebo v rozepsaném tvaru:

$$\begin{aligned} p: \quad x &= u \cdot t \\ y &= 0 \cdot t \\ z &= w \cdot t. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Bod $X(t) = [ut, 0, wt]$ při rotaci přímky p kolem osy z opisuje kružnici o rovnici

$$x^2 + y^2 = u^2 t^2. \tag{2.60}$$

Dosazením za t do rovnice (2.60) z (2.59) dostaneme

$$x^2 + y^2 - \frac{u^2}{w^2}\, z^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2} - \frac{z^2}{w^2} = 0,$$

což je rovnice hledané kuželové plochy. Porovnáním s (2.55) dostaneme geometrický význam parametrů a, b, c, kdy vychází $a = b = u$, $c = w$. □

Poznámka:
1) Ukázali jsme, že roviny, které jsou rovnoběžné se souřadnicovými rovinami protínají kuželovou plochu v elipse nebo hyperbole, či v jejich singulárních analogiích — v bodě nebo ve dvojici různoběžek.
Pokud se rovina řezu dotýká kuželové plochy podél povrchové přímky (a je

tedy její tečnou rovinou), potom je průnikem této roviny a kvadriky (dvojnásobná) přímka. Vezmeme-li rovinu, která je s tečnou rovinou rovnoběžná, potom je řezem parabola, viz [4].
Rovinným řezem kuželové plochy (2.55) jsou tedy téměř všechny kuželosečky včetně kuželoseček singulárních. Které chybějí?

2) Válcovou plochu můžeme, pokud připustíme existenci nevlastních bodů, také považovat za kuželovou plochu. Sice za kuželovou plochu s vrcholem v nevlastním bodě, který je dán směrem povrchových přímek válcové plochy.

3) Kuželovou plochu můžeme také definovat jako množinu všech přímek, které procházejí kuželosečkou a daným bodem — vrcholem, který neleží v rovině kuželosečky. Tuto vlastnost můžeme nahlédnout z této úvahy:
Obsahuje-li kuželová plocha (2.55) bod $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$, potom obsahuje i spojnici bodu X_0 s vrcholem $V = [0, 0, 0]$. Tedy přímka $X(t) = [x_0 t, y_0 t, z_0 t]$, $t \in \mathbb{R}$, leží na kuželové ploše, neboť rovnice (2.55) je splněna pro každé t, jak se můžeme přesvědčit přímým dosazením.

Obrázek 2.38: Rotační kuželová plocha na zastřešení věže sídla Krajského soudu v Českých Budějovicích

Příklad:
Napište rovnici kuželové plochy s vrcholem v bodě $V = [3, 0, 0]$, jejíž tvořící přímky svírají s osou x úhel $\varphi = 30°$.

Řešení: Ze zadání plyne, že se jedná o rotační kuželovou plochu s osou rotace v ose x, jejíž kanonická rovnice je

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0. \tag{2.61}$$

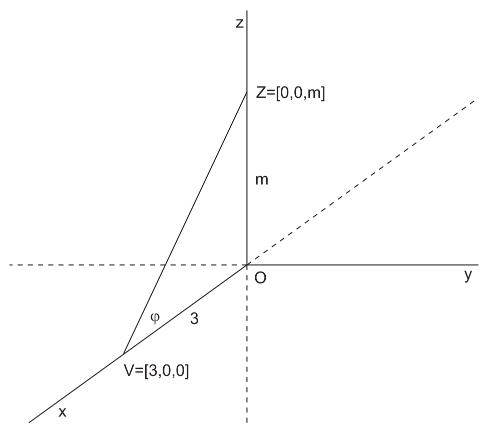
Protože vrchol má souřadnice $V = [3, 0, 0]$, potom má rovnice hledané kuželové plochy tvar

$$-\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0. \tag{2.62}$$

Vynásobením rovnice (2.62) výrazem b^2 dostaneme rovnici

$$-k(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{2.63}$$

kde jsme označili $k = b^2/a^2$. Získáme tak rovnici o jediné neznámé k. Její hodnotu zjistíme dosazením nějakého bodu kuželové plochy (který je různý od vrcholu) do rovnice (2.63).
Protože povrchové přímky kuželové plochy svírají s osou x úhel $\varphi = 30°$, potom pro bod $Z = [0, 0, m]$, který leží v průsečíku plochy (2.63) a osy z, platí, obr. 2.39, $\tan 30° = m/3$ a odtud $m = \sqrt{3}$.

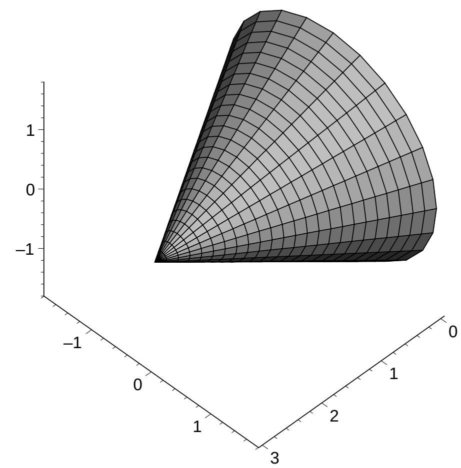


Obrázek 2.39:

Souřadnice bodu $Z = [0, 0, \sqrt{3}]$ dosadíme do (2.63) a dostaneme hodnotu $k = 1/3$.
Hledaná rovnice kuželové plochy je

$$(x-3)^2 - 3y^2 - 3z^2 = 0.$$

□



Obrázek 2.40: Rotační kuželová plocha v Maple (kód řešení viz str. 114)

Rovněž kuželová plocha má široké uplatnění jak v praktickém, tak teoretickém užití.