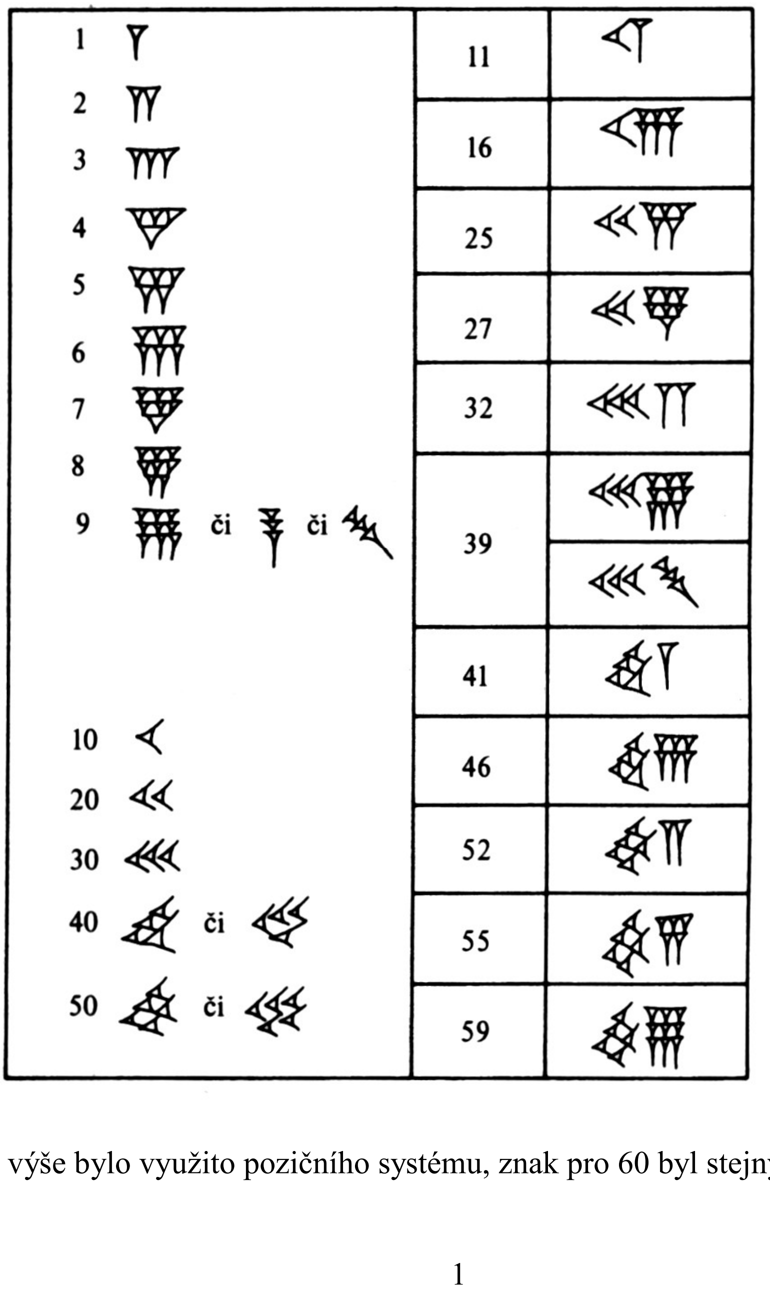
2.4 POZIČNÍ ČÍSELNÉ SOUSTAVY

Podívejme se například na čínskou počítací desku. Učiníme-li poslední krůček a nahradíme v každém políčku skupinu tyčinek odpovídající číslicí, obdržíme vyjádření čísla v desítkové poziční soustavě. Dříve než desítková se však používala soustava šedesátková, a to ve staré Mezopotámii.

Mezopotámie: poziční šedesátková soustava

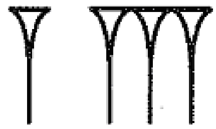
Sumerové psali na hliněnou tabulku, do níž vytlačovali znaky pomocí dvou typů rydel z rákosu či slonoviny. Kolem roku 2600 před naším letopočtem byla zavedena nová technologie psaní, a to pomocí klínového rydla. Pro zápis čísel byly používány dva základní tvary, vertikální klín označující jednotku a špice znázorňující desítku. Čísla od 1 do 59 se vyjadřovala jednoduše tak, že se „kupily“ tyto znaky nepozičním způsobem:



Obr. 2.34

Od čísla 60 výše bylo využito pozičního systému, znak pro 60 byl stejný jako pro 1.

Například číslo 63 se zapsalo tak, že se napsal znak pro jednotku (tj. pro 60) a vedle, za mezeru, se napsal znak pro trojku:



Poměrně dlouho však přetrvával problém s nejednoznačností zápisu, protože Sumerové neměli znak pro nulu – nebylo tak jasné, zda například zápis

vyjadřoval $10 \cdot 60 + 10 = 70$, nebo $10 \cdot 60^2 + 10 = 36\,010$, nebo $10 \cdot 60^2 + 10 \cdot 60 = 36\,660$ atd. Správná interpretace musela být vyvozena z kontextu dané úlohy.

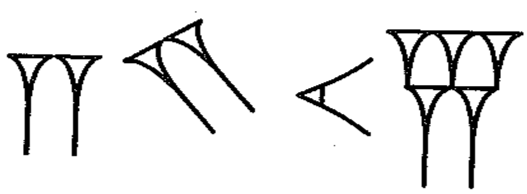
Teprve kolem roku 400 před naším letopočtem byl zaveden *separátor*

 popř. 

signalizující, že na daném řádu nic nevystupuje. S jeho využitím se například číslo

$$2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 15 = 7215$$

zapsalo následujícím způsobem:

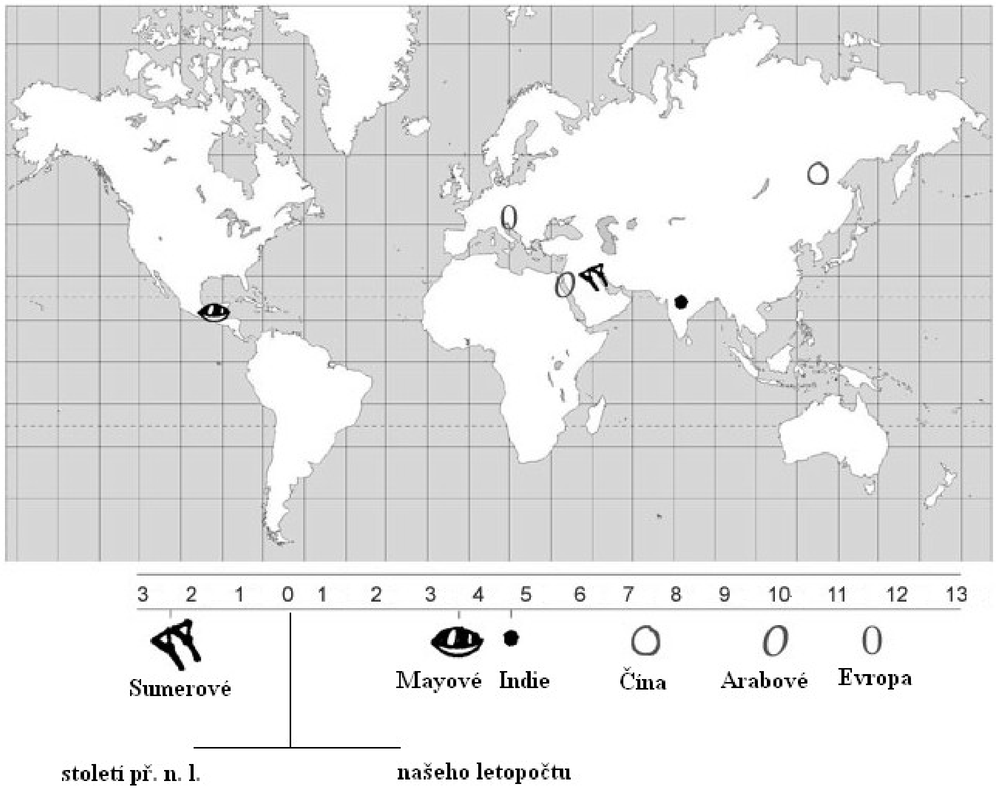


Obr. 2.35

Uvedený příklad pochází zhruba z konce třetího nebo začátku druhého století před naším letopočtem a byl nalezen na tabulce zaznamenávající astronomická pozorování.

Na separátor můžeme pohlížet jako na předchůdce naší nuly, jednalo se však skutečně jen o oddělení řádů, nikoli o vyjádření nulového množství. Znak nebyl nikdy použit například k vyjádření výsledu operace, po níž nic nezůstalo, takovýto výsledek byl vždy vyjádřen slovy.

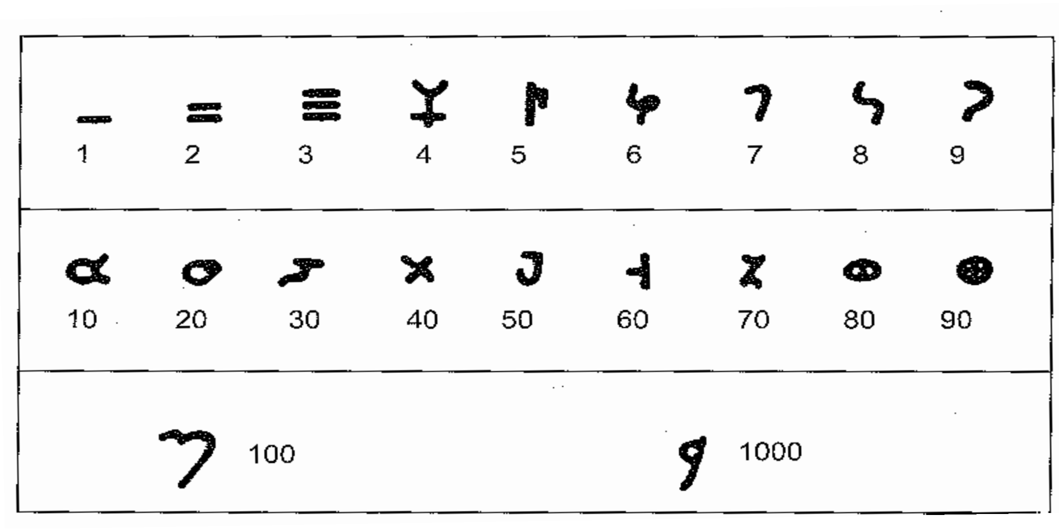
Nezávisle na Babylonu se „nula“ objevila v dějinách několikrát. Nulu v našem smyslu však lze nalézt až přibližně o tisíc let později v Indii.



Obr. 2.36

Indie: poziční desítková soustava

V Indii se kolem roku 350 před naším letopočtem objevily bráhmanské číslice, které se používaly jak v centrální Indii, tak i v blízkých oblastech jihovýchodní Asie. Notace byla značně různorodá – následující obrázek zachycuje opisy číslic z prvního a druhého století před naším letopočtem:

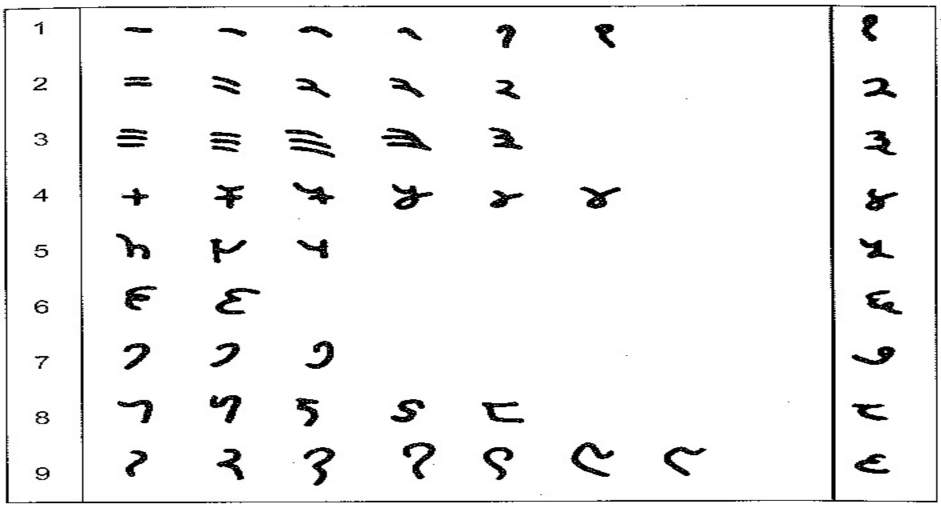


Obr. 2.37

Povšimněme si, že jsou zde zvláštní symboly pro čísla od 1 do 9. Právě tato skutečnost byla základním předpokladem pro vytvoření poziční desítkové číselné soustavy.

Bráhmanská soustava se proměnila v poziční se základem 10 pravděpodobně v šestém století našeho letopočtu. Nejstarší písemný doklad jejího užívání, ovšem bez nuly, je z roku 595 na měděné náhrobní desce ze Sankhedy.

Nejběžnější poziční notace používala písmo *nagari* – mnohé z těchto číslic jsou již podobné číslicím našim:



Obr. 2.38

Ve „správné“ poziční číselné soustavě však nesmí chybět znak pro nulu. Nejstarším příkladem užití tohoto znaku je indická nula z roku 458, která se vyskytuje v dochovaném spise o kosmologii. Existují však nepřímé doklady, že byla používána již 200 let před naším letopočtem.

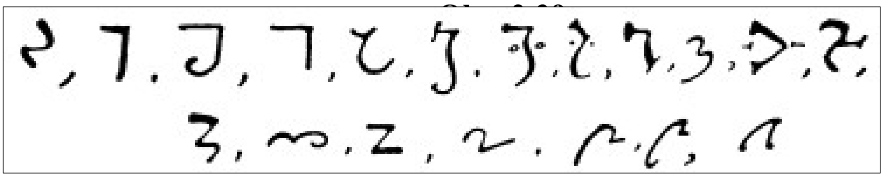
Nula byla nejprve označována tečkou, později malým kroužkem. Ačkoliv indická nula byla poprvé zavedena k označení chybějícího čísla, rychle nabyla postavení jednoho z čísel. Na rozdíl od Babylóňanů ji indičtí počtáři bez váhání uznali za výsledek odečtení čísla od sebe samého. Roku 628 ji indický astronom Brahmagupta tímto způsobem definoval a vyjádřil algebraická pravidla pro sčítání, odčítaní, násobení a – což je nejpřekvapivější – i pro dělení. Uveďme alespoň jedno z jeho pravidel: *Od většího je nutno odečíst menší, výsledek je kladný, jestliže odečítáme kladné od kladného a záporný, jestliže odečítáme záporné od záporného. Jestliže se odečítá větší od menšího, tento rozdíl (co do znaménka) se obrací, záporné se stává kladným a kladné se stává záporným. Jestliže se kladné odečítá od záporného nebo záporné od kladného, je nutné je sečíst.*

V Indii se tedy zrodila nula v podstatě v dnešním smyslu. To však nebyl jediný zásadní přínos indické matematiky. Pozoruhodné je, že Brahmagupta definoval i nekonečno jako číslo, které vznikne dělením každého jiného čísla nulou, a vypracoval obecný soubor pravidel pro násobení a dělení kladných i záporných veličin.

Pronikání indicko-arabských číslic do Evropy

O rozšíření indického číselného systému v Evropě se zasloužili Arabové, proto se dnes hovoří o *indicko-arabských číslicích*.[1] Jeho prosazení však trvalo poměrně dlouho; pohanská věda připadala Evropanům podezřelá,[2] indicko-arabské číslice byly dokonce nejprve prohlášeny za ďáblův nástroj. Ve větším rozsahu se tak číslice od 1 do 9 v Evropě používají až od dvanáctého století, nula byla uznána až ve století třináctém, především díky Leonardu Pisánskému, zvanému Fibonacci.

Číslice v té době ještě neměly ustálený tvar. Následující obrázek zachycuje různé zápisy číslice 2 ve středověkých rukopisech: Je proto pochopitelné, proč bylo ve Florencii v roce 1299 nařízeno, že ve smlouvách se musí čísla vypisovat slovy, aby se zabránilo podvodům.



Obr. 2.39

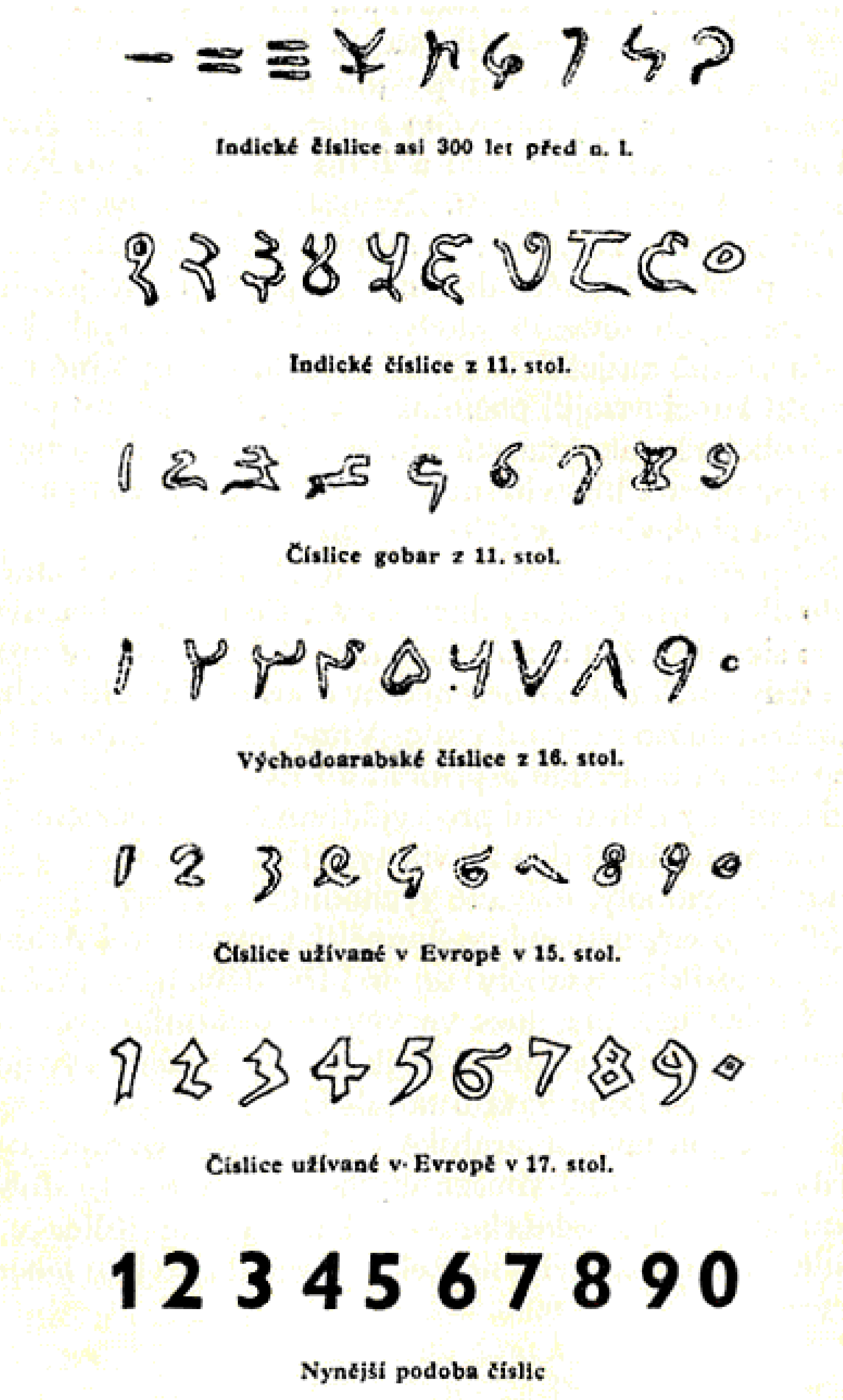
V předcházející části jsme se seznámili se způsobem počítání v nepoziční číselné soustavě. Snadno si proto uvědomíme výhodu naší poziční desítkové soustavy, v níž jsou veškeré výpočty výrazně jednodušší a rychlejší. Dřevoryt Gregora Reische z roku 1504 s názvem *Margareta philosophica* (*Perla filozofie*) ukazuje kontrast mezi výkonností *algoritmika* (vlevo – Boetius) a neschopností *abakisty* (vpravo – nešťastný Pythagoras).

Obr. 2.40

[1] Připomeňme, že v 7. století si arabské kmeny podmanily mnoho sousedních států a vytvořily tak jednotnou říši. V 8. století vtrhli Arabové do Evropy a obsadili Španělsko, boje o španělské území potom trvaly celá staletí. Byly však střídány s obdobími míru, kdy arabští kupci obchodovali s Francií a Itálií a kdy evropská mládež jezdila studovat do vyhlášených arabských kulturních center, jako byly Cordoba a Toledo. Tak se postupně dostávaly od Arabů do Evropy věda a umění z Egypta, starého Řecka, Mezopotámie i Indie.

[2] Ještě v roce 1359 se na jednání významných osob té doby v domě kanovníka Franceska Granacciho ve Florencii rokovalo dny a noci o arabských číslicích a záporných číslech, jejich používání však nebylo ani doporučeno ani zakázáno.

Podívejme se ještě na vývoj zápisu indicko-arabských číslic:



Obr. 2.41

Na závěr se zamysleme, proč je to právě desítková soustava, která nakonec převládla a dodnes se s úspěchem používá. Zkuste si sami odpovědět na následující otázky:

Kde se setkáváme s násobky 10?

Kolik je třeba číslic v desítkové soustavě?

Jak je velká malá násobilka?

Kolik je třeba číslic v šedesátkové soustavě?

Jak je velká „malá násobilka“ pro šedesátkovou soustavu?

Chtělo by se Vám ji učit nazpaměť?[3]

V čem je naopak výhodnější soustava šedesátková?

Jak se vyjádří např. 99 nebo 999 v šedesátkové soustavě?

Kolik je třeba číslic např. ve dvojkové soustavě?

Jak je velká malá násobilka pro dvojkovou soustavu?

Jak se vyjádří např. 99 nebo 999 ve dvojkové soustavě?

Máme-li odpovědi, vidíme, že desítková soustava je mimo jiné šikovným kompromisem mezi poměrně krátkým zápisem čísel, ale velkou „malou násobilkou“ (jako je tomu třeba u šedesátkové soustavy), a jednoduchou malou násobilkou, ale dlouhým zápisem čísel (jako je tomu třeba u soustavy dvojkové).

[3] Ani v Mepozotámii se ovšem malou násobilku neučili zpaměti, ale používali tabulky.