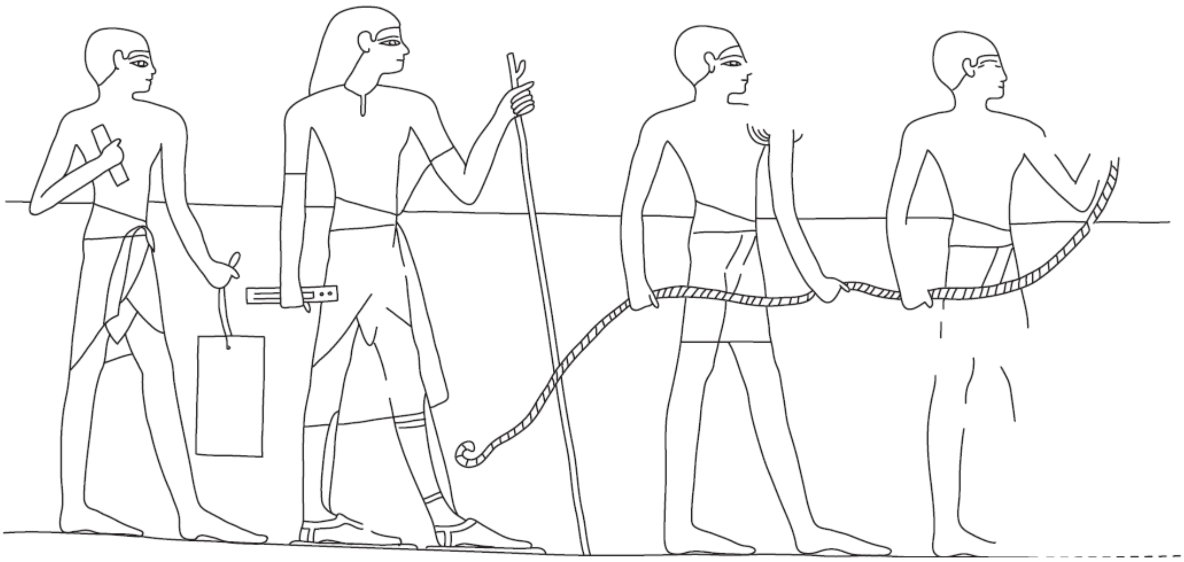
3.1 OBSAHY ROVINNÝCH ÚTVARŮ

Představa obsahu rovinného obrazce byla pro lidi důležitá od pradávných dob – ať již se jednalo o velikost a přeměnu polí či například rozměry základů obydlí. Úlohy na výpočet obsahu základních geometrických útvarů v rovině jsou obsaženy v nejstarších dochovaných písemných památkách. Praktickou motivaci vzniku geometrie ilustruje vyprávění nejstaršího řeckého dějepisce Hérodota (5. stol. př. n. l.) o tom, jak faraón Ramses II. rozdělil půdu mezi Egypťany tak, že každý obdržel pole čtyřúhelníkového tvaru a stejného obsahu. Z jeho výnosu odváděl každoročně faraónovi daně. Jestliže někomu byla část pole odplavena při nilských záplavách, bylo jeho povinností oznámit to faraónovi, který poslal zeměměřiče, aby škodu zjistili a podle zbylé výměry i správně určili novou daň.

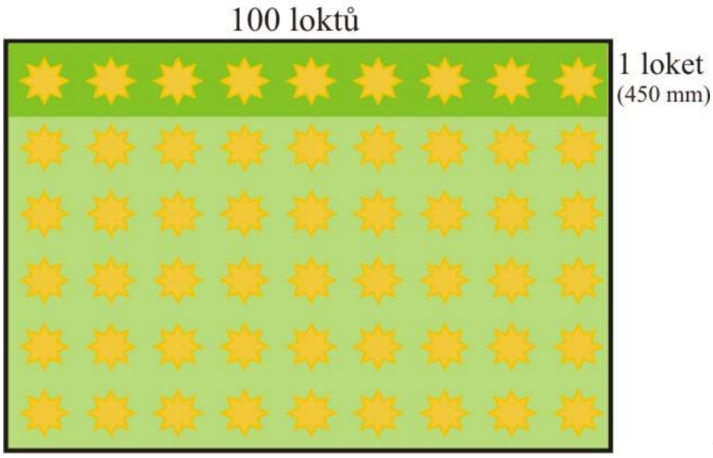
Následující obrázek pochází z Džeserkaresenebovy hrobky v západních Thébách z doby 18. dynastie (1543–1292 př. n. l.) a zachycuje vyměřování pole. Je na něm vyobrazen písař opírající se o hodnostářskou hůl, doprovázený mladým učedníkem, jak dohlíží na dva asistenty provádějící pomocí silného lana potřebná měření.



Obr. 3.1

Obdélník

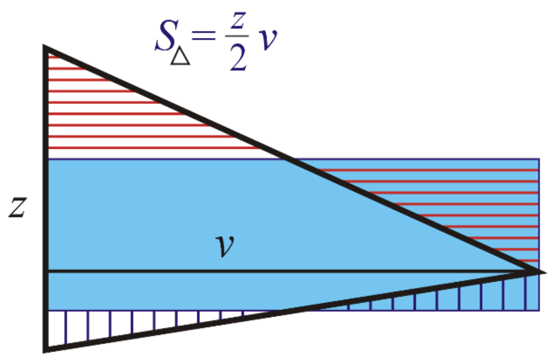
Egyptské papyry a mezopotámské hliněné tabulky z druhé poloviny druhého tisíciletí před naším letopočtem dokládají, že obsah obdélníka byl určován obvyklým způsobem jako součin délek jeho stran (označovaných jako délka a šířka). Podívejme se například do starého Egypta. Obdélník zde byl základním tvarem pole. Odvození vzorce pro jeho obsah mohlo vycházet z tzv. *pruhové míry*, která byla založena na pruhu zorané půdy o délce 100 loktů a šířce 1 loket; obsah tohoto pruhu se označoval jako *pozemní loket* (*meh*) – viz obrázek 3.2. Počet těchto vyoraných pruhů vynásobený délkou pruhu poskytoval poměrně přesný odhad třeba pro stanovení množství zasévaného obilí.



Obr. 3.2

Trojúhelník

Obsah trojúhelníka byl ve starém Egyptě určován jako součin poloviny základny a výšky; řečeno dnešními slovy, trojúhelník se převáděl na rovnoplochý obdélník:

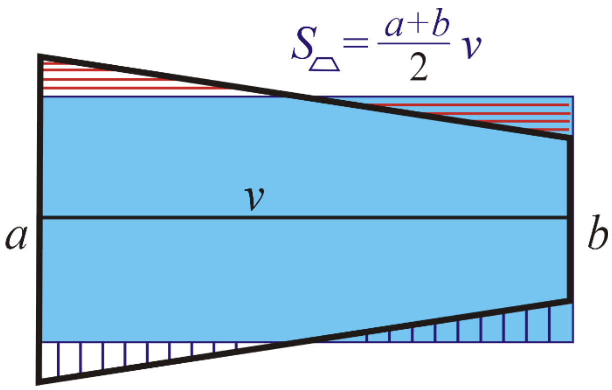


Obr. 3.3

Trojúhelník byl většinou rovnoramenný; není zcela jisté, zda údaj, který chápeme jako výšku, nebyl v egyptských textech ve skutečnosti délkou jedné ze stran trojúhelníka – pak by byl vzorec samozřejmě jen přibližný.

Lichoběžník

Obsah lichoběžníka se určoval rovněž převedením na rovnoplochý obdélník; postup pro výpočet odpovídá dnešnímu vzorci, kde se násobí aritmetický průměr základen a výška lichoběžník:

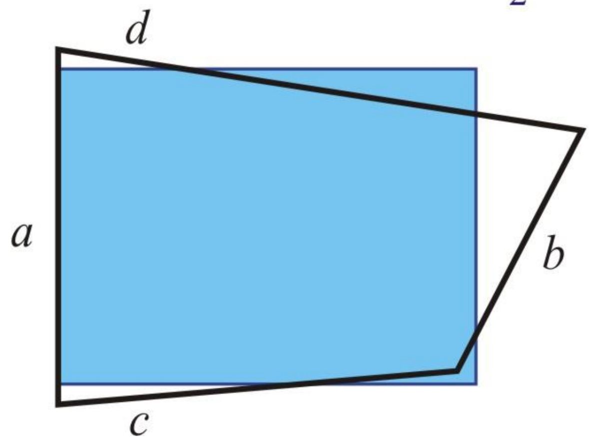


Obr. 3.4

Obecný čtyřúhelník

Obsah obecného čtyřúhelníka Egypťané počítali podle přibližného vzorce

$$S \doteq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$$



Obr. 3.5

Kruh

Výpočet obsahu kruhu používaný ve starém Egyptě odpovídá vzorci, který bychom v dnešní symbolice pro kruh o průměru *d* napsali takto:

$$S = \left(d - \frac{1}{9} \cdot d\right)^2 = \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \frac{64}{81} \cdot d^2 .$$

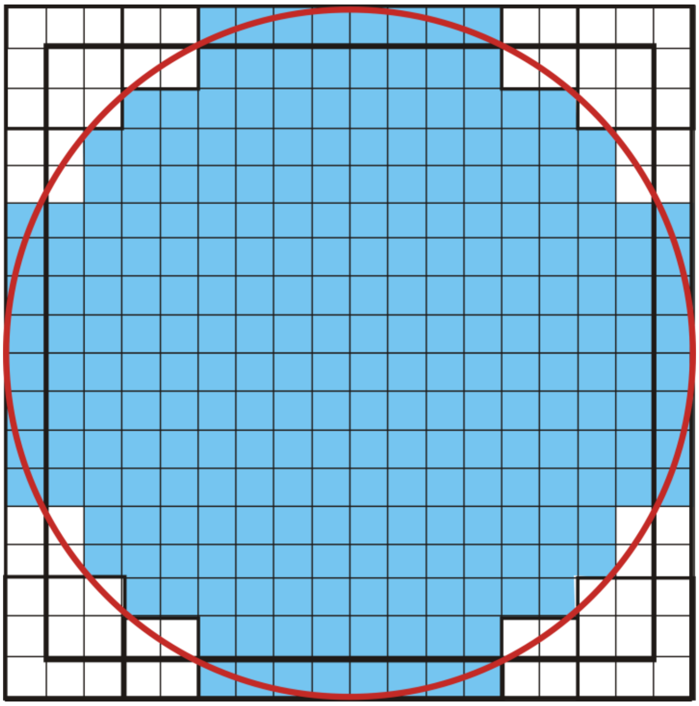
Slovní popis tohoto postupu je obsažen v příkladu č. 50 v Rhindově papyru, který je nadepsaný *Metoda výpočtu* [obsahu] *kruhové plochy*.

Jaký je obsah plochy? Odečti 1/9 z toho, je to 1, zbytek je 8. Počítej s 8 osmkrát, vyjde 64. Toto je obsah v ploše: 64 secat-johet.

Srovnáme-li předpis odpovídající egyptskému postupu s naším vzorcem pro výpočet obsahu kruhu, dostaneme egyptskou hodnotu čísla π:

$$\frac{1}{4} \pi \cdot d^2 = \frac{64}{81} \cdot d^2, \quad \text{tj.} \quad \pi = \frac{264}{81} \doteq 3{,}1605.$$

Jeden z mnoha způsobů, jimiž mohli Egypťané k tomuto výsledku dospět, lze popsat následujícím způsobem. Danému kruhu opišme čtverec a ten rozdělme na 18×18 stejných čtverečků. V každém rohu opsaného čtverce odeberme čtverec obsahující 3×3 čtverečky a dva sousední čtverce obsahující 2×2 čtverečky. Obsah kruhu aproximujme obsahem takto vytvořeného útvaru – viz následující obrázek.



Obr. 3.6

Celkem jsme odebrali 68 čtverečků (v každém rohu $9+2\cdot 4$), obsah kruhu jsme tak odhadli $18^2-68=256=16^2$ čtverečky o straně $\frac{1}{18}\cdot d$, což odpovídá čtverci o straně

$$\frac{16}{18}\cdot d=\frac{8}{9}\cdot d=\left(d-\frac{1}{9}\cdot d\right).$$

Popsaný způsob odpovídá hojnému využívání čtvercové sítě při projektování egyptských staveb, soch, reliéfů, malířské výzdoby apod.

Ve staré Mezopotámii byl pro výpočet obsahu kruhu používán algoritmus, který lze v dnešní symbolice vyjádřit pomocí vzorce $S=\frac{1}{12}\cdot O^2$, kde O je obvod kruhu. Tento vztah by odpovídal hodnotě $\pi=3$, kterou získáme snadným dosazením: $\pi r^2=\frac{1}{12}\cdot 4\pi^2 r^2$. Na některých tabulkách však byl použit i odhad $\pi=3\frac{1}{8}$.

Obr. 3.7

Eudoxova exhaustivní metoda

Výrazný pokrok v oblasti určování obsahů a objemů umožnila tzv. *exhaustivní* (*vyčerpávací*) *metoda* vypracovaná řeckým matematikem Eudoxem z Knidu (asi $408-355$ př. n. l.). Tato metoda byla založena na následujícím tvrzení:

Jsou-li dány dvě nestejné veličiny a od větší odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina.

Díky tomuto tvrzení lze například obsah rovinného útvaru A získat pomocí vepisování mnohoúhelníků $P_1, P_2, \ldots, P_n$, jejichž obsahy jsou známé, tvoří monotónní posloupnost $S(P_1) < S(P_2) < \cdots < S(P_n)$ a platí pro ně nerovnosti:

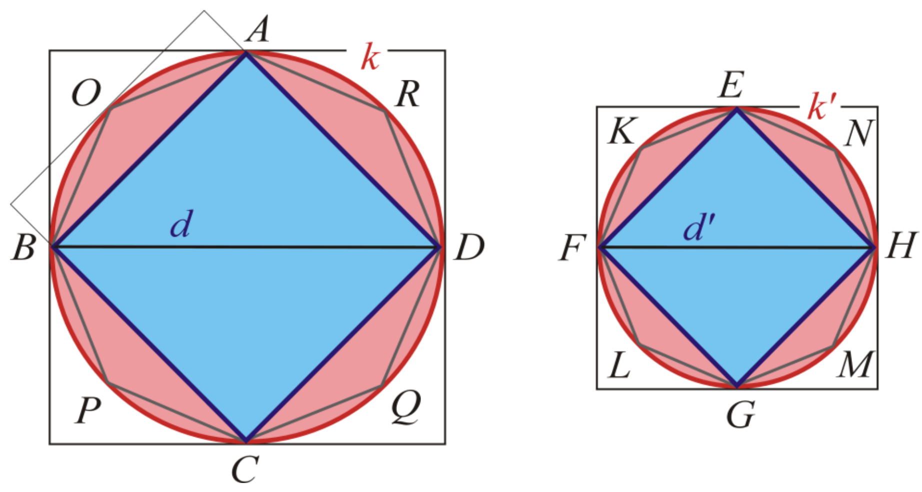
$$S(A)-S(P_1) < \frac{S(A)}{2},\ \ S(A)-S(P_2) < \frac{(S(A)-S(P_1))}{2} < \frac{S(A)}{4}, \ldots, S(A)-S(P_n) < \frac{S(A)}{2^n}.$$

Podle výše uvedeného tvrzení je při dostatečně vysokém n rozdíl $S(A)-S(P_n)$ menší než libovolná kladná veličina (dnes bychom napsali $S(A) = \lim_{n\to\infty} S(P_n)$). Eudoxos tedy hledal takové číslo B, pro něž je rozdíl $B - S(P_n)$ menší než libovolná kladná veličina; sporem se pak snadno dokáže, že $S(A) = B$.

Původní Eudoxovy práce se nezachovaly, jeho metoda je však podrobně rozpracována v Eukleidových *Základech* napsaných o několik desetiletí později. Kromě dalších tvrzení souvisejících s objemy těles, o kterých se zmíníme později, Eukleides například pomocí exhaustivní metody odvodil, že *obsahy kruhů jsou v témže poměru jako obsahy čtverců sestrojených nad jejich průměry***.**

Důkaz lze poněkud zjednodušeně popsat následujícím způsobem. Do daných kruhů *k*, *k*' o průměrech *d*, *d*' vepišme čtverce *ABCD*, *EFGH*. Obsahy těchto čtverců jsou ve stejném poměru jako druhé mocniny průměrů *d*, *d*':

$$\frac{S(ABCD)}{S(EFGH)} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2.$$

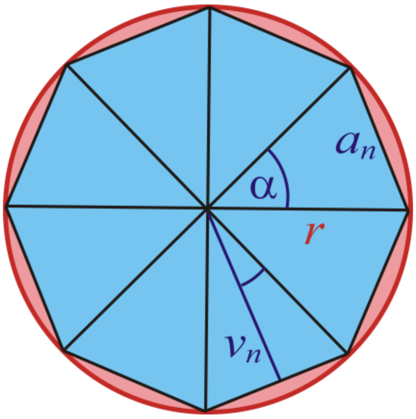


Obr. 3.8

Již dříve Eukleides dokázal, že stejný vztah platí pro libovolnou dvojici podobných mnohoúhelníků vepsaných do daných kruhů *k*, *k*'. Protože v dalším budeme uvažovat jen pravidelné mnohoúhelníky, vystačíme si s jednoduchou úvahou o obsahu libovolného pravidelného *n*-úhelníka.

Libovolný pravidelný *n*-úhelník vepsaný do kruhu *k* o poloměru *r* lze rozdělit na *n* shodných trojúhelníků s vrcholem ve středu kruhu, kde

$$\frac{a_n}{2} = r \sin\frac{\alpha}{2}, \quad v_n = r\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \frac{360}{n}.$$



Obr. 3.9

Obsah každého takového trojúhelníka je

$$S_\Delta = r^2 \sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha$$

pro obsah *n*-úhelníka proto platí:

$$S_n = r^2 \cdot \tfrac{1}{2} n \sin\alpha = d^2 \cdot \tfrac{1}{8} n \sin\alpha$$

Pro libovolnou dvojici *n*-úhelníků vepsaných do kruhů *k, k*' je tedy poměr jejich obsahů roven

$$\frac{S_n}{S_n'} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2.$$

Nyní se vraťme zpět k původnímu obrázku. Obsah čtverce $P_4 = ABCD$ je roven jedné polovině obsahu čtverce opsaného kruhu *k*, je proto větší než polovina obsahu tohoto kruhu; ze stejného důvodu je také obsah čtverce $P_4' = EFGH$ větší než polovina obsahu kruhu *k*'. Dále vepišme do obou kruhů pravidelné osmiúhelníky rozdělením příslušných oblouků na poloviny. Obsah trojúhelníka *AOB* je roven polovině obsahu obdélníka opsaného kruhové úseči *AOB*, je proto větší než jedna polovina obsahu této úseče; obsah osmiúhelníka $P_8 = AOBPCQDR$ je tedy větší než ¾ obsahu kruhu *k*. Podobně obsah osmiúhelníka $P_8' = EKFLGMHN$ je větší než ¾ obsahu kruhu *k'*. Tímto způsobem můžeme pokračovat libovolně dlouho: do kruhů můžeme vepsat pravidelné šestnáctiúhelníky, dvaatřicetiúhelníky atd. Pro jejich obsahy bude stále platit týž poměr:

$$\frac{S(P_4)}{S(P_4')}=\frac{S(P_8)}{S(P_8')}=\frac{S(P_{16})}{S(P_{16}')}=\frac{S(P_{32})}{S(P_{32}')}=\cdots=\left(\frac{d}{d'}\right)^2.$$

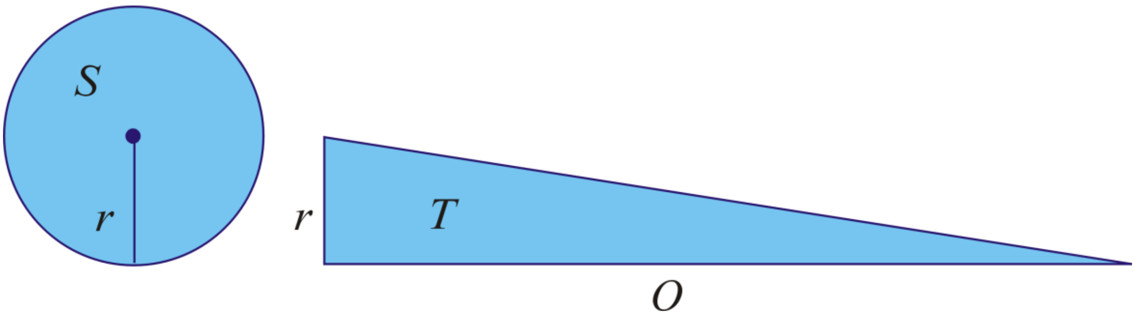
Zároveň budou tyto mnohoúhelníky postupně vyčerpávat kruhy *k*, *k*'. Podle Eudoxovy věty platí, že zbývající části kruhů lze libovolně zmenšit; sporem lze ukázat, že poměr obsahů kruhů *k*, *k*' nemůže být ani větší ani menší než výše uvedená hodnota, proto

$$\frac{S(k)}{S(k')}=\left(\frac{d}{d'}\right)^2.$$

Dnes, kdy již máme k dispozici pojem limity, bychom řekli, že obsah kruhu je limitou příslušné posloupnosti obsahů vepisovaných *n*-úhelníků, a okamžitě bychom tak dostali příslušnou rovnost.

Z výsledku je patrné, že obsah kruhu je přímo úměrný druhé mocnině jeho poloměru, tj. $S=\pi_1 r^2$ pro nějakou konstantu π_1. Podobně bylo známo, že obvod kruhu je přímo úměrný první mocnině jeho poloměru, tj. $O=2\pi_2 r$ pro nějakou konstantu π_2. To, že jsou obě konstanty shodné, dokázal až Archimedes (asi 287 – 212 př. n. l.) ve svém spise *Měření kruhu*, z něhož se zachoval zlomek obsahující tři pozoruhodné matematické věty; první z nich udává právě vztah mezi obvodem a obsahem kruhu:

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož délky odvěsen jsou rovny poloměru a obvodu kruhu.



Obr. 3.10

V dnešní symbolice lze uvedené tvrzení vyjádřit vzorcem

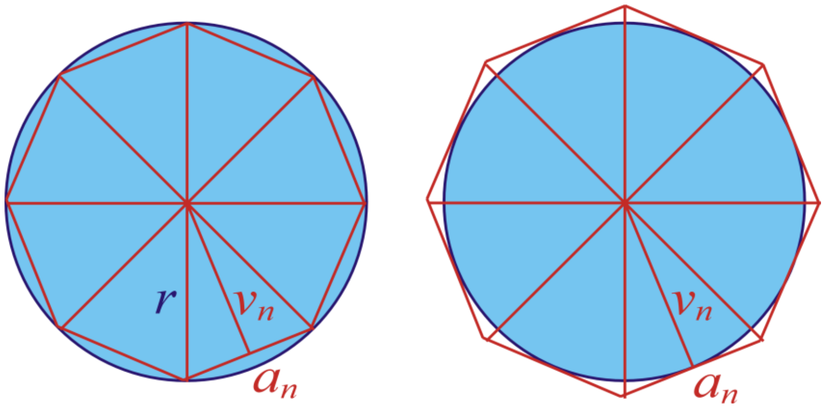
$$S=\frac{1}{2}\cdot O\cdot r,$$

kde *r* je poloměr daného kruhu, *O* jeho obvod a *S* jeho obsah. Po dosazení dostáváme

$$\pi_1 r^2=\tfrac{1}{2}\cdot 2\pi_2 r\cdot r,\qquad \text{tj.}\qquad \pi_1=\pi_2;$$

ve vzorci pro výpočet obsahu a obvodu kruhu proto figuruje stejná konstanta, kterou jsme dnes zvykli označovat symbolem π.

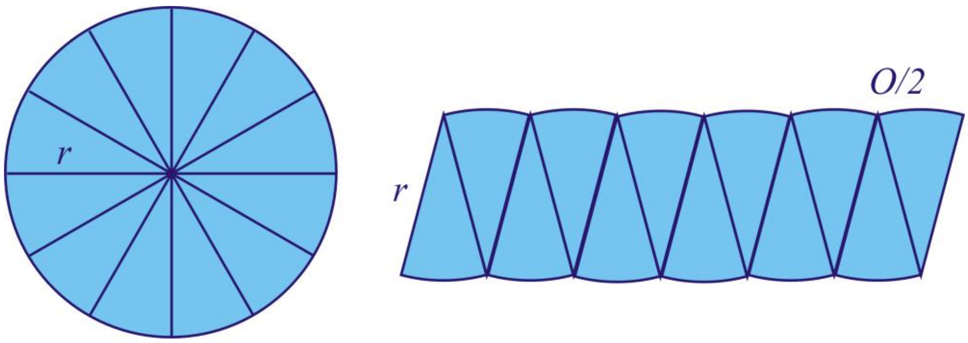
Označme písmenem *T* obsah příslušného pravoúhlého trojúhelníka. Důkaz tvrzení, že platí rovnost $S=T$, provedl Archimedes exhaustivní metodou; základní myšlenku lze nastínit takto. Předpokládejme, že je $S>T$. Uvažujme posloupnost obsahů S_n vepsaných *n*-úhelníků pro $n=4,8,16,\ldots$. Pro dostatečně vysoké *n* se bude obsah S_n lišit od *S* o méně než $S-T$, bude tedy $S>S_n>T$. Hodnota S_n je však součtem obsahů *n* trojúhelníků, jejichž výšky jsou menší než r a součet délek jejich základen je menší než O, proto musí být $S_n < T$; předpoklad $S > T$ tedy vede ke sporu.



Obr. 3.11

Dále naopak předpokládejme, že je $S < T$, a uvažujme posloupnost obsahů S_n opsaných n-úhelníků pro $n = 4, 8, 16, \ldots$. Pro dostatečně vysoké n se bude obsah S_n lišit od S o méně než $T - S$, bude tedy $T > S_n > S$. Hodnota S_n je však součtem obsahů n trojúhelníků, jejichž výšky jsou rovny r a součet délek jejich základen je menší než O, proto musí být $S_n > T$; předpoklad $S > T$ tedy rovněž vede ke sporu. Platí proto $S = T$.

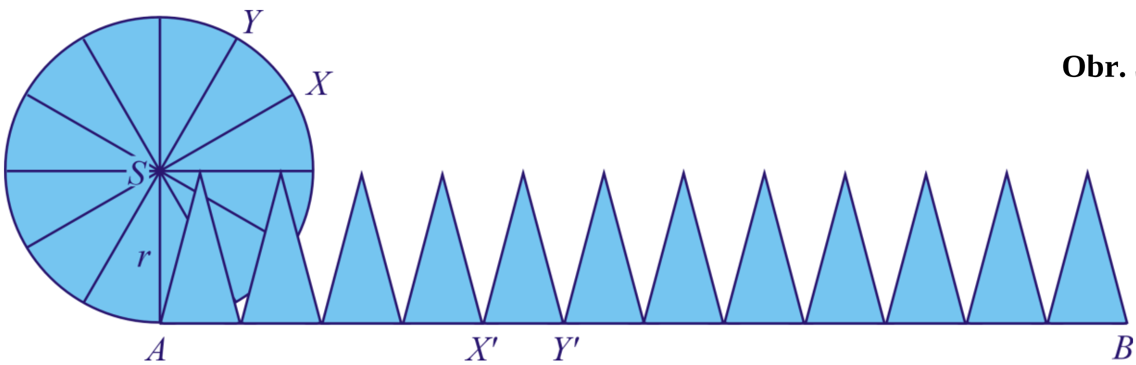
Archimedův důkaz lze zjednodušeně prezentovat tak, že se daný kruh rozdělí na n shodných výsečí, které se poskládají tak, jak ukazuje následující obrázek. S rostoucím n se bude vzniklý útvar přibližovat obdélníku o stranách r a $O/2$, jehož obsah je $S = \frac{1}{2} r \cdot O$.



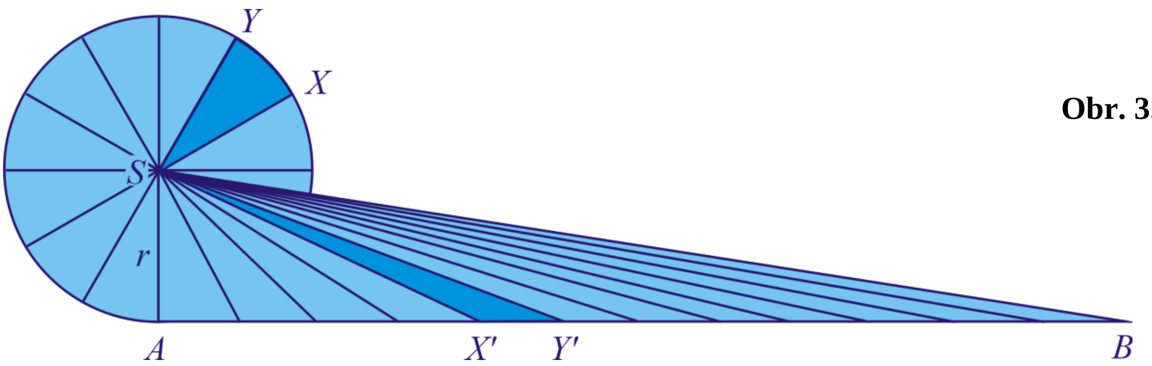
Obr. 3.12

Podobnou – z dnešního pohledu ne zcela přesnou – úvahu provedl Jan Kepler (1571–1630) v 17. století. Kruh si představil rozdělen na nekonečně malé výseče, které považoval za rovnoramenné trojúhelníky; kružnici tak rozvinul do úsečky AC o délce O, kde délka úsečky $X'Y'$ je rovna délce úsečky XY:

Obr. 3.13



Tyto trojúhelníky je možné nahradit jinými se stejnými základnami a výškou – tedy se stejným obsahem; pouze vrchol je vždy posunut do středu kružnice, takže tyto trojúhelníky dohromady vyplňují pravoúhlý trojúhelník *ABS* odvěsnami délek *O* a *r*:



Obr. 3.14

Dodejme, že Archimedes ve svém spise *Měření kruhu* rovněž uvedl odhad pro poměr obvodu *O* a průměru *d* libovolného kruhu; protože dnes poměr O/d značíme symbolem π, můžeme tento výsledek napsat ve tvaru

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{22}{7} \doteq 3{,}14286$ a navíc se s tímto zlomkem dobře počítá, bývala a ve škole dosud bývá tato hodnota používána jako vhodná přibližná hodnota čísla π.

Výpočtem obvodů vepsaných a opsaných *n*-úhelníků pro $n = 6, 12, \ldots, 96$ Archimedes odvodil i přesnější odhad:

$$\frac{25\,344}{8\,069} < \pi < \frac{29\,376}{9\,347}.$$