3.2 OBJEMY A POVRCHY TĚLES

Krychle, kvádr, hranol

Dochované matematické texty ze starého Egypta obsahují několik úloh na výpočet objemu *čtverhranných obilnic* tvaru krychle; lze předpokládat, že stejným způsobem byli egyptští počtáři schopni počítat i objem kvádru. Mezopotámské tabulky obsahují úlohy, kde se hledá objem krychle, kvádru či několika kvádrů. Postup výpočtu lze v naší symbolice napsat obvyklým způsobem:

$$V = a^3, \qquad \text{resp.} \qquad V = abc,$$

kde a je délka hrany krychle, resp. a, b, c jsou délky hran kvádru.

Mezopotámští počtáři rovněž počítali objem hranolu jako součin obsahu základny a výšky, dále objem klínu (i nepravidelného) a různých těles s lichoběžníkovými podstavami (koryto, hráz).

Válec

Objem válce byl ve starém Egyptě i Mezopotámii počítán obvyklým způsobem jako součin obsahu základny a výšky, přičemž obsah kruhové základny byl počítán tak, jak jsme viděli v předchozí části. Formulace úloh byla i zde praktická – hledal se například objem obilnice či studny kruhového průřezu.

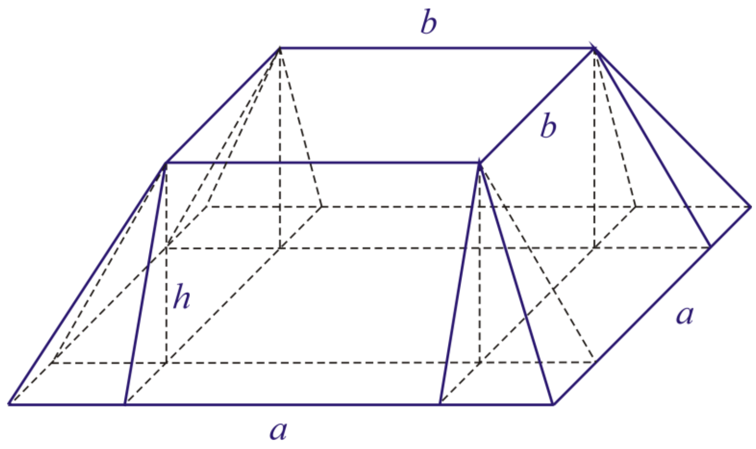
Jehlan

Zastavme se ve starém Egyptě. Rhindův papyrus obsahuje několik úloh, v nichž je počítán například sklon stěny pyramidy o čtvercové základně, kde je známa délka strany základny a výška, či výška pyramidy s danou čtvercovou základnou a se známým sklonem stěny.

Moskevký papyrus obsahuje velice zajímavou úlohu na výpočet objemu pravidelné komolé pyramidy, tedy **pravidelného kolmého komolého jehlanu**. Slovní popis řešení této úlohy můžeme v dnešní symbolice vyjádřit vzorcem, který je zcela správný:

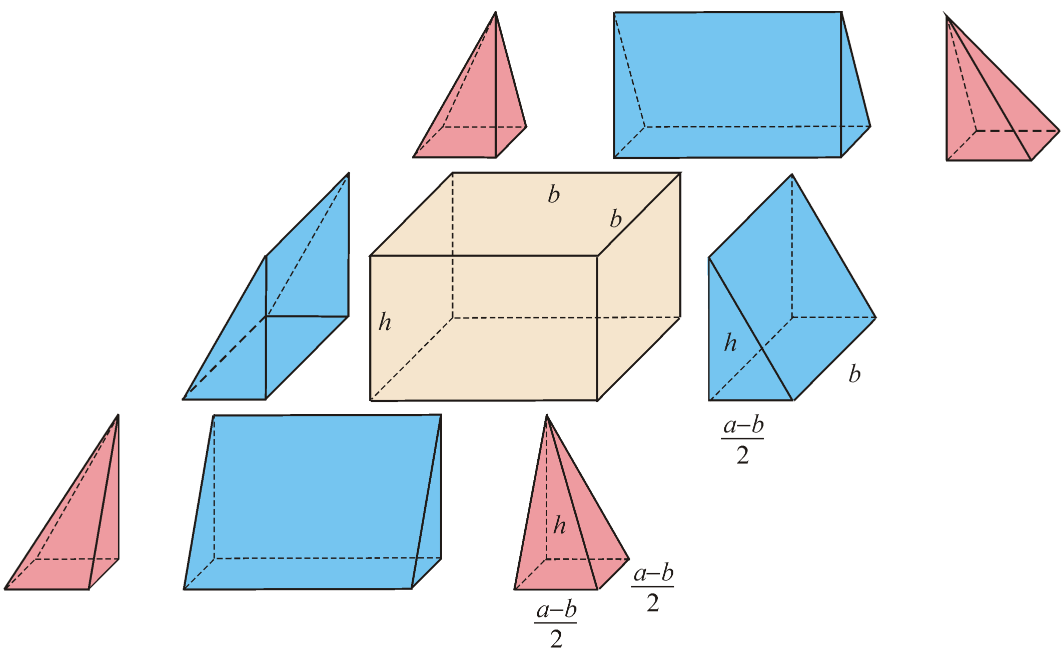
$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(a^2 + ab + b^2\right),$$

kde a je délka strany dolní čtvercové základny, b je délka strany horní čtvercové základny a h je výška pyramidy.



Obr. 3.15

Zdá se velmi pravděpodobné, že Egypťané k tomuto vzorci dospěli teoreticky; řada historiků matematiky se proto snažila vysvětlit, jakým způsobem. Jeden z možných postupů je následující. Představme si, že daný pravidelný kolmý komolý jehlan rozdělíme na 9 částí: jeden hranol výšky h se čtvercovou základnou o straně b, čtyři jehlany výšky h se čtvercovými základnami o straně $\frac{1}{2}(a-b)$ a čtyři trojboké hranoly – poloviny kvádru výšky h se základnou o stranách b, $\frac{1}{2}(a-b)$:



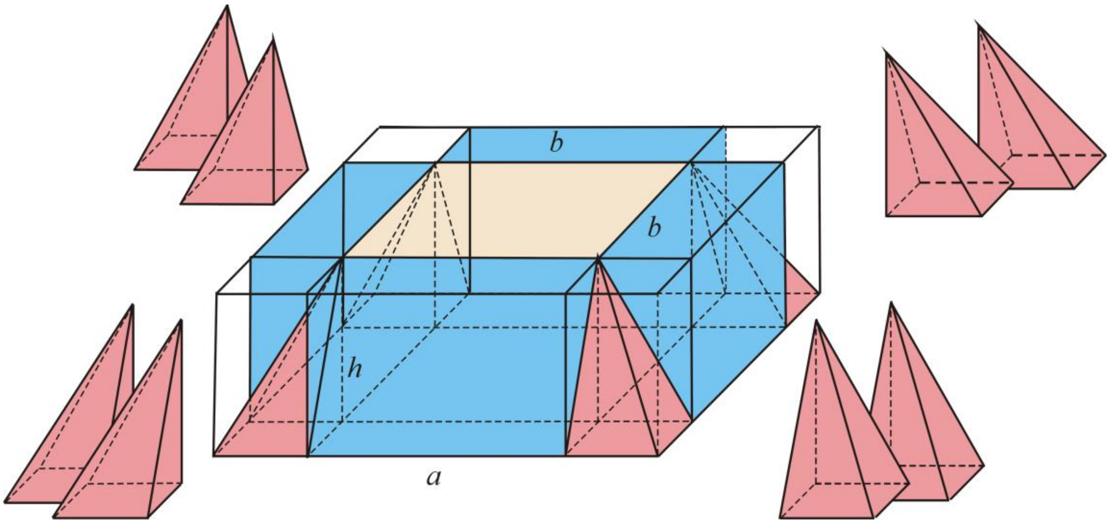
Obr. 3.16

Sečteme-li objemy těchto těles, dostaneme:

$$V = b^2 \cdot h + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cdot h + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a^2+ab+b^2}{2}\right).$$

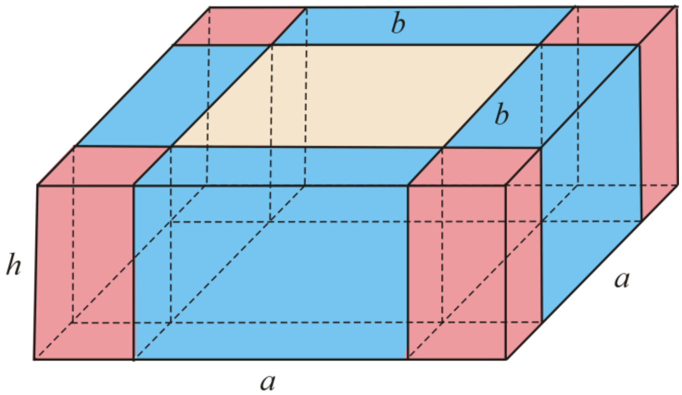
Uvedené vysvětlení je didakticky názorné, zároveň však z historického hlediska poněkud problematické, protože nemáme žádný doklad o tom, že by Egypťané používali matematickou symboliku a prováděli algebraické úpravy (i když někteří badatelé provádění algebraických úprav připouštějí).

Jiné možné odvození je ryze geometrické (viz [BBV], str. 99): Uvažujme tři takovéto komolé jehlany, první ponechejme celý a druhé dva si představme rozložené na výše uvedená tělesa. K prvnímu komolému jehlanu přidejme čtyři trojboké hranoly (na obrázku modře) odebrané od druhého jehlanu a osm jehlanů odebraných od druhého a třetího jehlanu (na obrázku červeně).



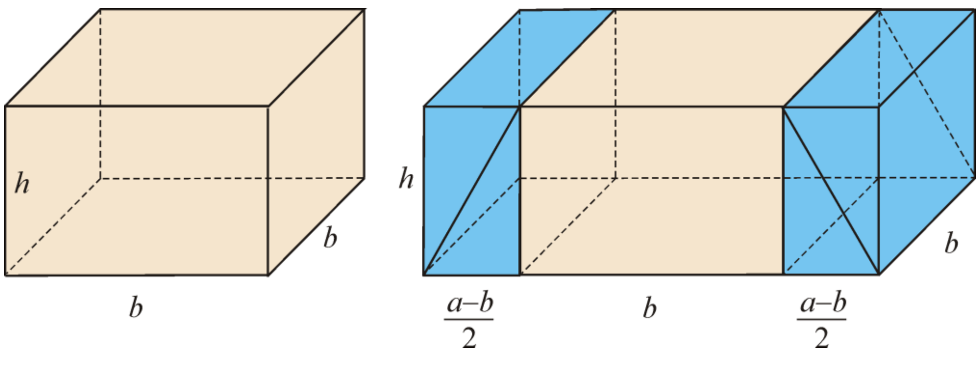
Obr. 3.17

Součet objemů těchto těles je roven objemu hranolu s podstavnou hranou a a výškou h, tedy a^2h.



Obr. 3.18

Z druhého komolého jehlanu zbude hranol s podstavnou hranou b a výškou h, který má objem b^2h. Třetí komolý jehlan s odebranými „rohy“ přeskládáme tak, že vznikne kvádr s délkami stran a, b, h:

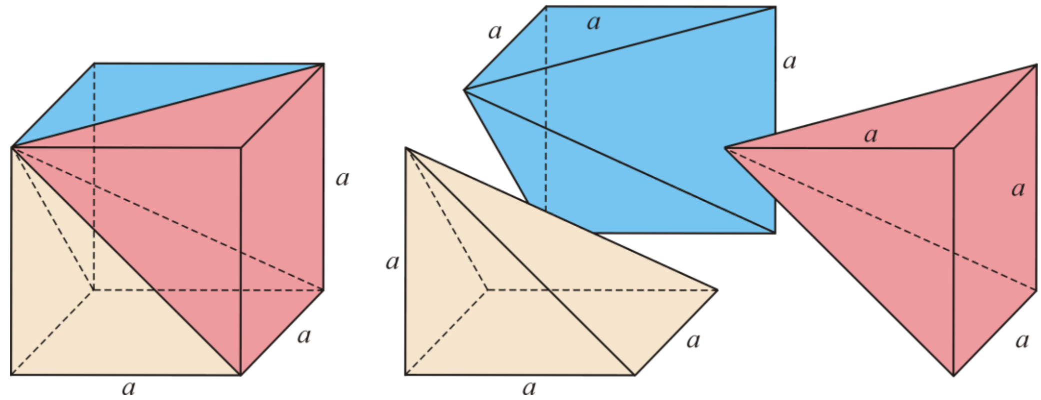


Obr. 3.19

Tato tři tělesa mají dohromady objem $h \cdot \left(a^2 + ab + b^2\right)$, objem jednoho komolého jehlanu je proto roven

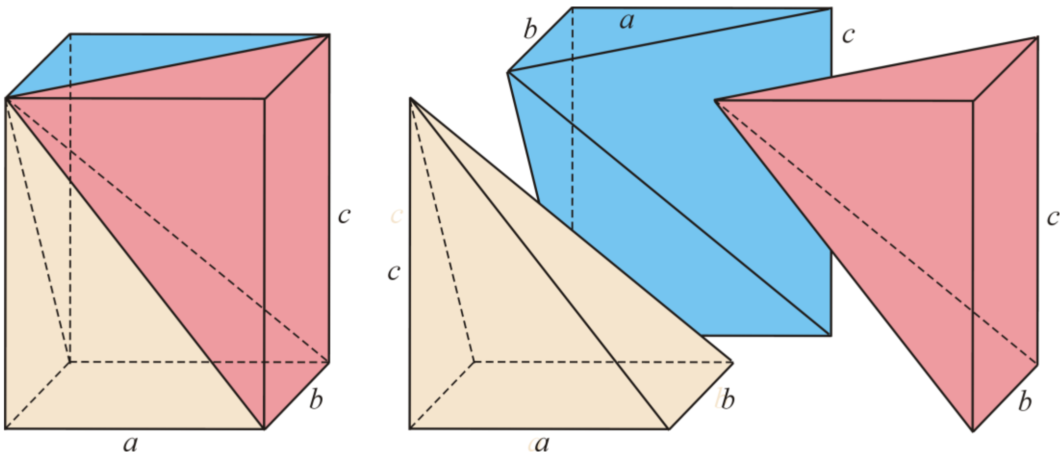
$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Ve výše uvedených úvahách jsme ovšem využívali poznatek, že objem jehlanu (v tomto případě pravoúhlého) je roven jedné třetině hranolu se stejnou podstavou a výškou. Je pravděpodobné, že tento poznatek staří Egypťané znali – ať již na základě měření či úvah o „rozřezávání“ hranolu. Snadno si představíme, že krychli lze rozdělit na tři shodné jehlany:



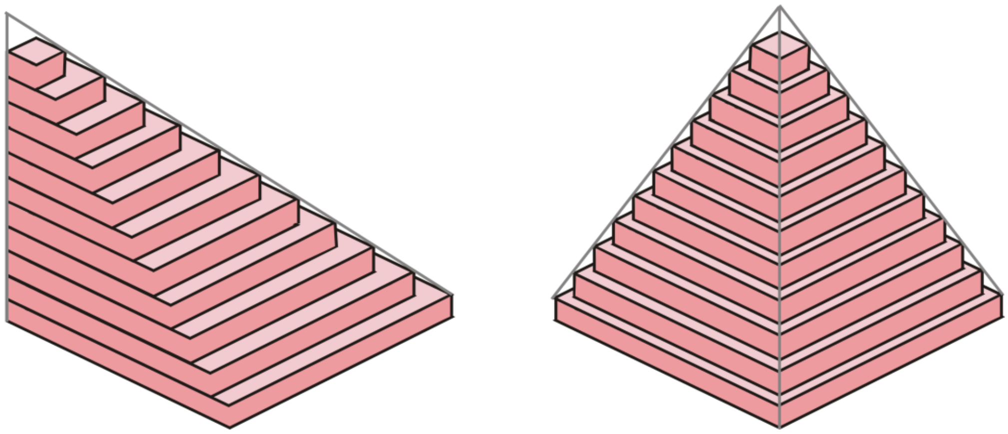
Obr. 3.20

U kvádru je to o něco složitější; nelze jej rozložit na tři shodné jehlany, je však možné jej rozdělit na tři pravoúhlé jehlany, které mají stejný objem (mezi délkami stran podstavy a výškou jsou vždy všechny tři hodnoty *a*, *b*, *c*).



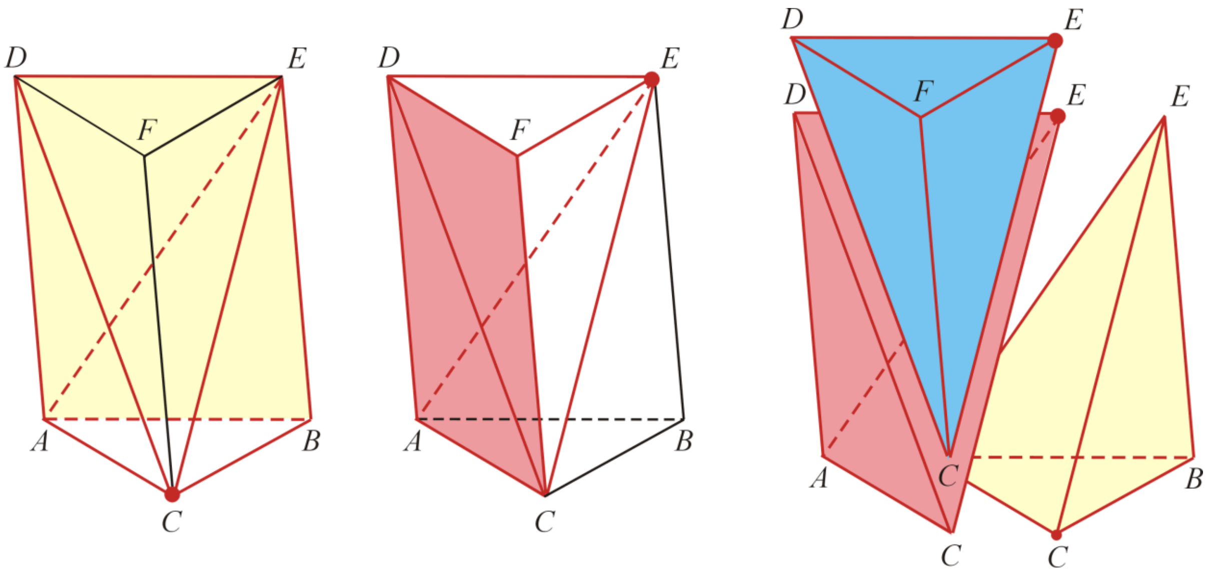
Obr. 3.21

Podle dochovaných pramenů byl poznatek, že objem pyramidy závisí pouze na obsahu podstavy a na výšce, zformulován až ve starém Řecku. Vzhledem k tomu, že Egypťané měli s pyramidami mnoho zkušeností, snad mohla být v jejich možnostech i představa, že množství stavebního materiálu se nezmění, budou-li se po sobě jednotlivé stupně pyramidy posouvat – viz následující obrázek.



Obr. 3.22

Důkaz vzorce pro objem jehlanu se dochoval v 12. knize Eukleidových *Základů* napsaných kolem roku 300 př. n. l. Pomocí exhaustivní metody Eukleides nejprve dokázal, že dva jehlany se shodnými základnami a výškami mají stejný objem; v důsledku toho pak platí obdobné tvrzení pro jehlany o shodných mnohoúhelníkových základnách a výškách. Dále dokázal, že libovolný trojboký hranol lze rozdělit na tři trojboké jehlany téhož objemu:



Obr. 3.23

ABED je rovnoběžník, trojúhelníky *ABE*, *EDA* jsou proto shodné a leží v jedné rovině; jehlany s podstavami *ABE*, resp. *EDA* a vrcholem *C* mají proto stejný objem. Analogicky lze ukázat, že stejný objem mají i jehlany s podstavami *ACD*, resp. *FDC* a vrcholem *E*. Původní hranol jsme tak rozdělili na tři jehlany se shodným objemem: *ACDE*, *ABEC*, *FDCE*.

Protože libovolný hranol s mnohoúhelníkovou podstavou lze rozložit na trojboké hranoly, platí i pro libovolný jehlan s mnohoúhelníkovou podstavou, že jeho objem je roven jedné třetině hranolu se stejnou podstavou a výškou.

Podle zmínky v Archimedově spise *O metodě* dospěl ke správnému vztahu mezi objemem trojbokého jehlanu a příslušného hranolu (stejně jako pro vztah mezi kuželem a válcem se shodnou podstavou a výškou) již Demokritos z Abdery (460 – 370 př. n. l.) na základě své atomistické teorie; jeho práce se však nezachovaly a dnes se můžeme jen domýšlet, jakým způsobem postupoval.

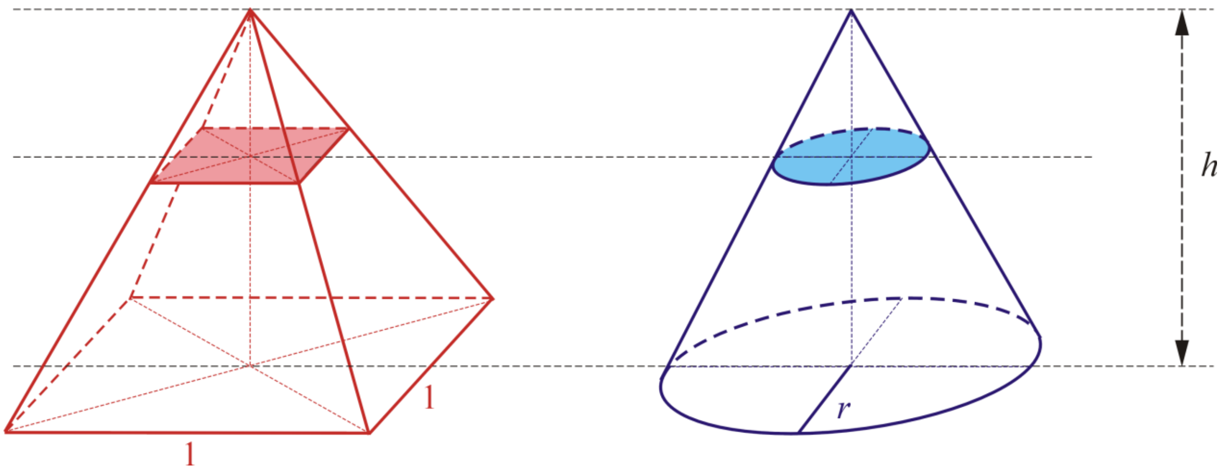
Kužel

Důkaz tvrzení, že objem kužele je roven jedné třetině objemu válce se stejnou podstavou a výškou, dokázal rovněž Eukleides v 12. knize *Základů*, a to opět exhaustivní metodou. Důkaz není příliš náročný, je však poněkud pracný.

Ve školské matematice se dnes toto tvrzení odvozuje jednodušeji pomocí principu, který vyložil Bonaventura Cavalieri (1598–1647) ve svém díle *Geometria indivisibilius continuorum* z roku 1635. Cavalieri určoval objem tělesa na základě porovnání plošných vrstviček, tzv. *indivisibilií* (nedělitelné), daného tělesa s obdobnými vrstvičkami v jiném tělese známého objemu. Své výsledky shrnul ve formulaci, kterou dnes nazýváme *Cavalieriho principem*:

Když dvě tělesa mají stejnou výšku a když řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s jejich podstavami a mají od nich stejnou vzdálenost, jsou takové, že poměr jejich obsahů je vždy stejný, potom objemy těles mají týž poměr.

V případě kužele s poloměrem podstavy r a výškou h stačí uvažovat jehlan se stejnou výškou a se čtvercovou podstavou o straně 1:



Obr. 3.24

Roviny, které jsou rovnoběžné s podstavami obou těles a jsou vedeny ve stejné výšce, protínají tato tělesa v kruhu, resp. čtverci, jejichž obsahy jsou v konstantním poměru $\pi r^2 : 1$. Pro objemy těles pak podle Cavalieriho principu platí:

$$\frac{V_k}{V_j} = \pi r^2, \qquad \text{tedy} \qquad V_k = \pi r^2 V_j\,,$$

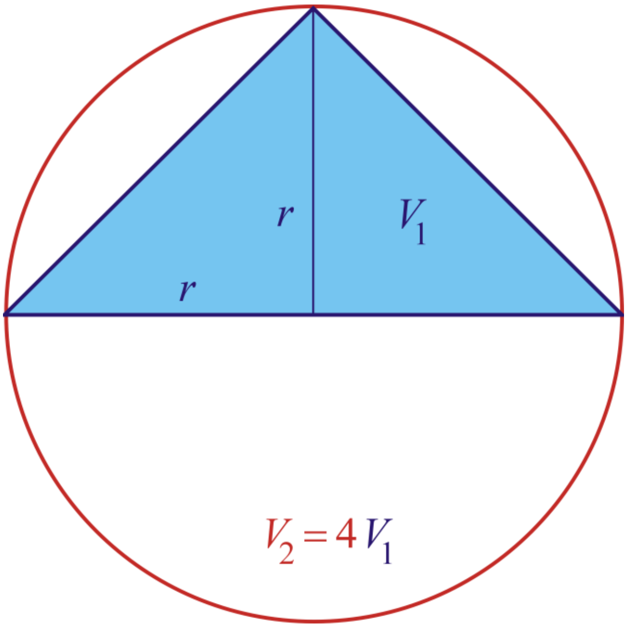
kde V_k je objem daného kužele a V_j je objem uvedeného jehlanu s jednotkovou podstavou, který je roven $V_j = \frac{1}{3}h$. Objem kužele je proto roven $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Dodejme, že vztah pro *povrch pláště* kužele odvodil ve svém spise *O kouli a válci* Archimedes. S využitím exhaustivní metody dokázal: *Povrch pláště kužele o poloměru základny r a straně s je roven obsahu kruhu o poloměru* $\sqrt{rs}$.

Kužel

Ve stejném spise Archimedes pomocí exhaustivní metody rovněž dokázal:

- *Povrch koule je roven čtyřnásobku obsahu kruhu o stejném poloměru.*
- *Objem koule je roven čtyřnásobku objemu kužele, jehož poloměr základny i výška jsou rovny poloměru koule.*



Obr. 3.25

Uvědomme si, že z uvedených tvrzení vyplývá to, že známá konstanta π, která vystupuje ve vzorcích pro výpočet obvodu a obsahu kruhu, se objevuje i ve vzorcích pro výpočet objemu a povrchu koule.

Tato tvrzení lze zformulovat i následujícím způsobem:

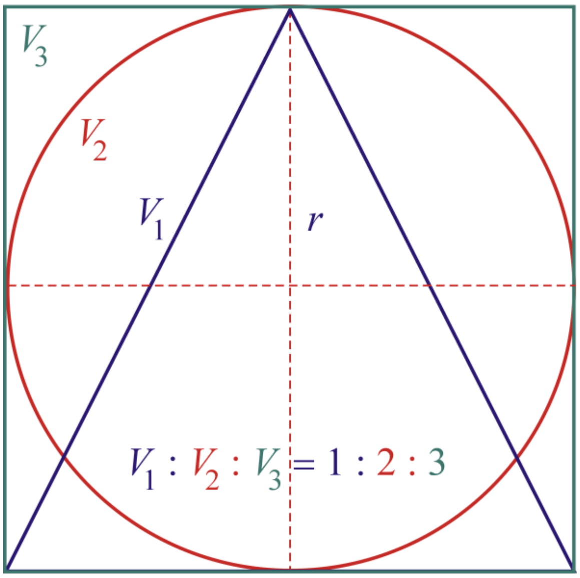
- *Povrch koule je roven dvěma třetinám povrchu opsaného válce, tj. povrchu pláště opsaného válce.*
- *Objem koule je roven dvěma třetinám objemu opsaného válce.*

Uvedená tvrzení jsou pro žáky dobře zapamatovatelná a mohou jim proto sloužit k vybavení vzorců pro výpočet povrchu a objemu koule. Budeme-li totiž uvažovat kouli o poloměru r a jí opsaný válec, tedy válec o poloměru r a výšce $2r$, pak objem tohoto válce je $\pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$ a povrch $2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$; podle zmíněných tvrzení tedy pro objem a povrch koule platí:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad S = 4\pi r^2.$$

Důsledkem posledního uvedeného tvrzení je následující vztah mezi objemy koule, kužele a válce, který je s Archimedovým jménem neodlučitelně spjat.

Objemy kužele o poloměru základny r a výšce 2r, koule o poloměru r a válce o poloměru r a výšce 2r jsou v poměru $1:2:3$.

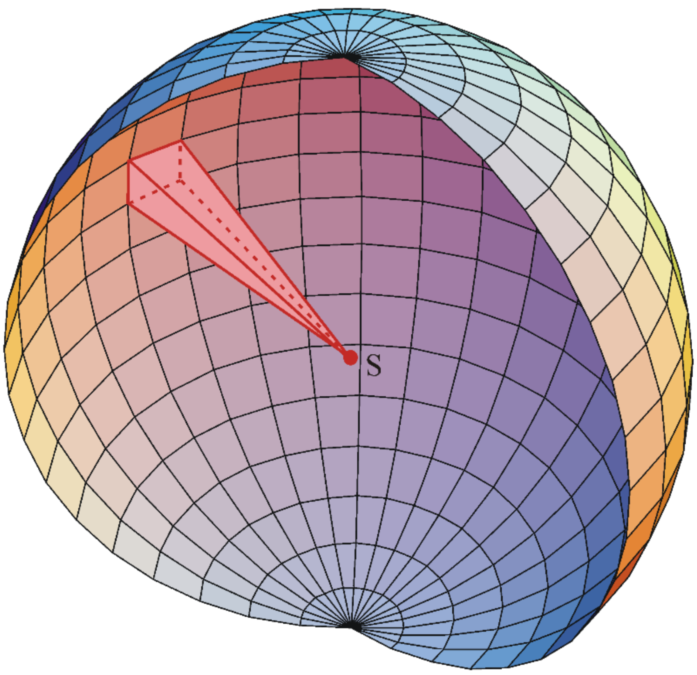


Obr. 3.26

V souvislosti s výpočtem obsahu kruhu jsme zmínili jméno Jana Keplera. Podobnými úvahami, které sice nejsou zcela přesné, zato však velmi názorné, odvodil kromě jiného i předpis pro objem koule:

Kouli o poloměru r si Kepler představil rozřezanou na nekonečně mnoho jehlanů s vrcholy ve středu koule, základnou na povrchu koule a výškou rovnou poloměru koule. Součet objemů těchto jehlanů je roven $V = \frac{1}{3}Ar$, kde $A = 4\pi r^2$ je povrch koule.

Objem koule je tedy $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



Obr. 3.27