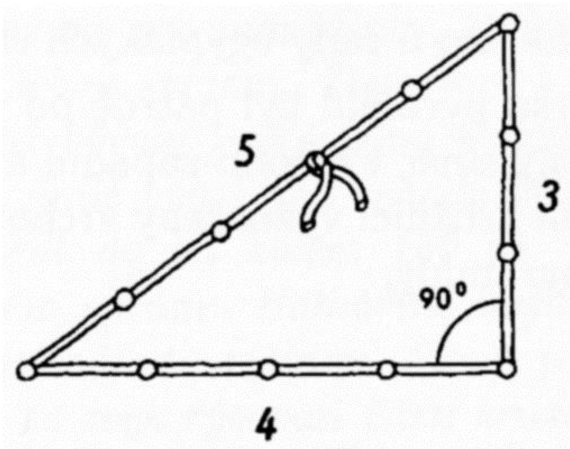
3.3 PYTHAGOROVA VĚTA

Starověk

Pythagorova věta byla známa již ve starověku. V Egyptě možná používali již ve třetím tisíciletí před naším letopočtem pro vytyčování pravého úhlu lano, na němž bylo ve stejných vzdálenostech rozmístěno 12 uzlů. Napne-li se lano pomocí tří kolíků tak, že vznikne trojúhelník s vrcholy v prvním, čtvrtém a osmém uzlu, pak řečeno dnešními slovy, tento trojúhelník je podle obrácené Pythagorovy věty pravoúhlý s pravým úhlem u čtvrtého uzlu.



Obr. 3.28

V Mezopotámii je znalost Pythagorovy věty doložena již v době Starobabylonské říše. Úlohy pocházející z tohoto období svědčí o tom, že Pythagorova věta byla chápána jako vztah mezi délkami stran pravoúhlého trojúhelníka. Nevíme, zda starobabylonští počtáři objevili i důkaz této věty. Je však třeba zmínit, že hliněná tabulka Plimpton 322 z období 1900 – 1600 př. n. l. obsahuje patnáct dvojic přirozených čísel a, c, pro která je c^2-a^2 druhou mocninou jistého přirozeného čísla b, neboli $a^2+b^2=c^2$; takovouto trojici přirozených čísel a, b, c dnes nazýváme *Pythagorejskou trojicí*. Je možné, že byly tyto trojice původně vyčteny z tabulek druhých mocnin, které byly v Mezopotámii hodně užívané.

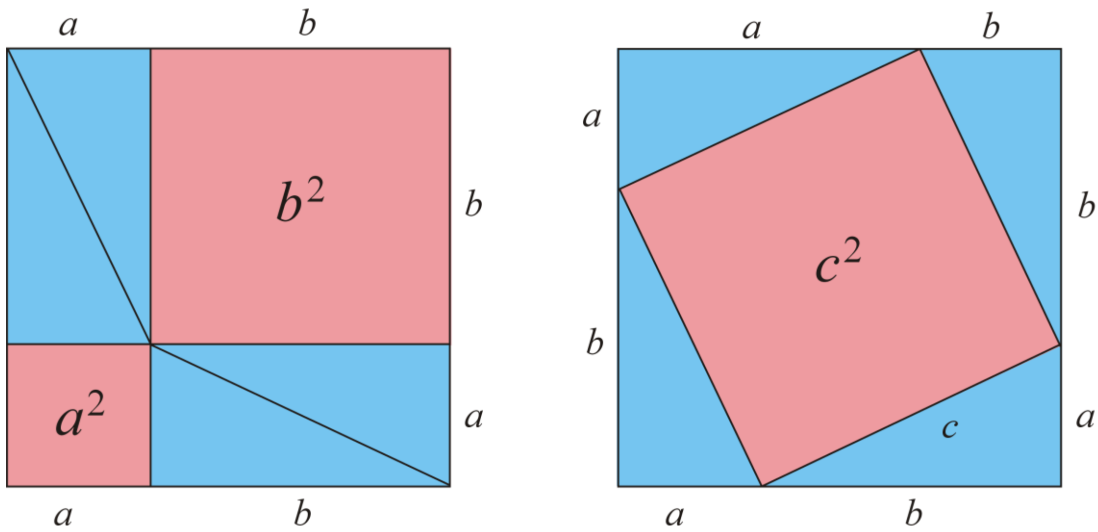
V průběhu dvacátého století byla tabulka předmětem mnoha studií. Bylo zjištěno, že všechny v ní obsažené pythagorejské trojice jsou až na jednu výjimku tvaru

$$a=p^2-q^2, \qquad b=2pq, \qquad c=p^2+q^2,$$

kde $p>q$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Tabulka je navíc zajímavá také tím, že obsahuje i druhou mocninu podílu c/b, který dnes nazýváme funkcí *kosekans* úhlu β. Bylo by však příliš odvážné považovat Plimptonovu tabulku za tabulku trigonometrickou.

Antika

První důkaz Pythagorovy věty se obvykle připisuje Pythagorovi ze Samu (570? – 500? př. n. l.). Bohužel dnes nevíme, jaký důkaz podal – a byl-li to skutečně on. Je však možné, že postupoval následujícím způsobem. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou c a dva shodné čtverce o straně $a+b$.



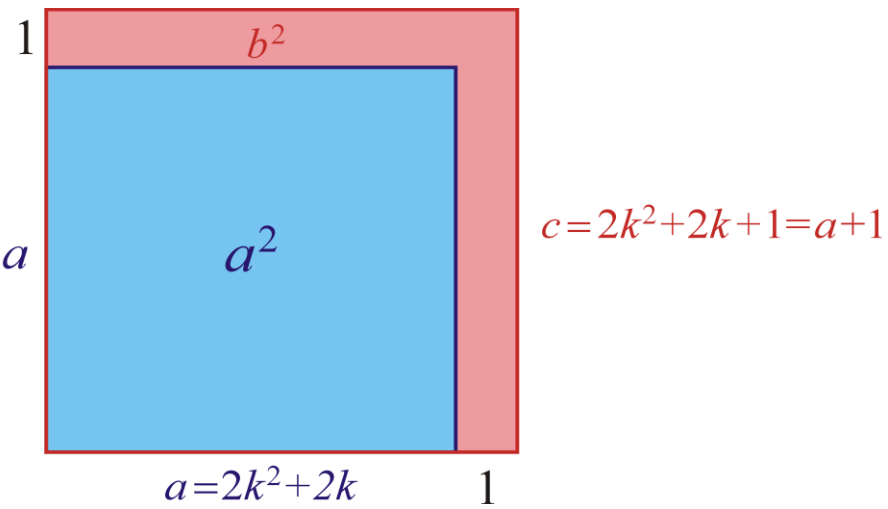
Obr. 3.29

Druhý čtverec rozdělme na pět částí: čtverec o straně c a opět čtyři pravoúhlé trojúhelníky shodné se zadaným trojúhelníkem. Odečteme-li v obou případech od obsahu velkého čtverce obsahy čtyř shodných trojúhelníků, zbudou útvary, jejichž obsahy musí být rovněž shodné.

Pythagorejské škole je rovněž připisován vzorec, pomocí něhož lze nalézt nekonečně mnoho pythagorejských trojic (ne však všechny):

$$(2k^2+2k)^2+(2k+1)^2=(2k^2+2k+1)^2, \quad \text{tj.} \quad a=2k^2+2k,\ b=2k+1,\ c=2k^2+2k+1,$$

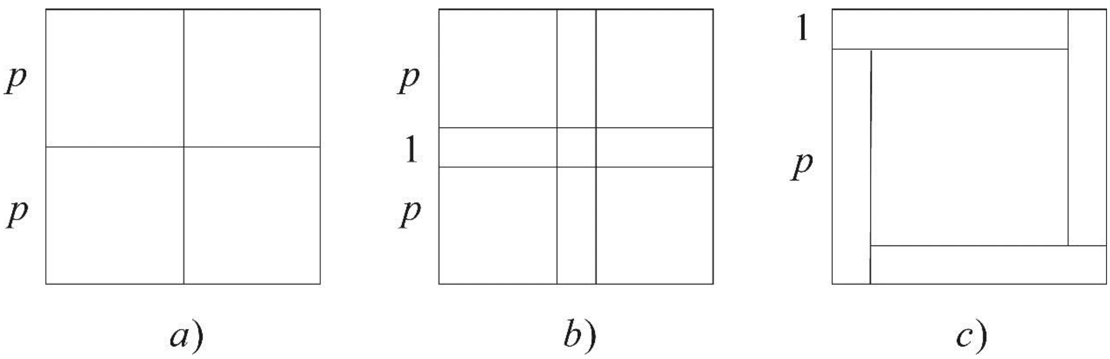
kde k je libovolné přirozené číslo. Možné zdůvodnění je patrné z následujícím obrázku.



Obr. 3.30

Předpokládejme, že $c=a+1$. Pak je b^2 a tedy i b liché, např. $b=2k+1$; odtud $b^2=4k^2+4k+1$. Podle obrázku je $a=\frac{1}{2}\left(b^2-1\right)=2k^2+2k$ a konečně $c=2k^2+2k+1$.

Platonův spis *Menon* obsahuje jiný vztah, který lze odvodit následujícím způsobem.



Obr. 3.31

Z obrázku je patrné, že druhá mocnina sudého čísla je číslo sudé, $(2p)^2 = 4p^2$ (a), a druhá mocnina lichého čísla je číslo liché, $(2p+1)^2 = 4p(p+1)+1$ (b). Obr. c) ukazuje, že je $(p+1)^2 = 4p+(p-1)^2$. Je-li p čtvercem, tj. $p = m^2$, pak $4p = 4m^2 = (2m)^2$ a tedy

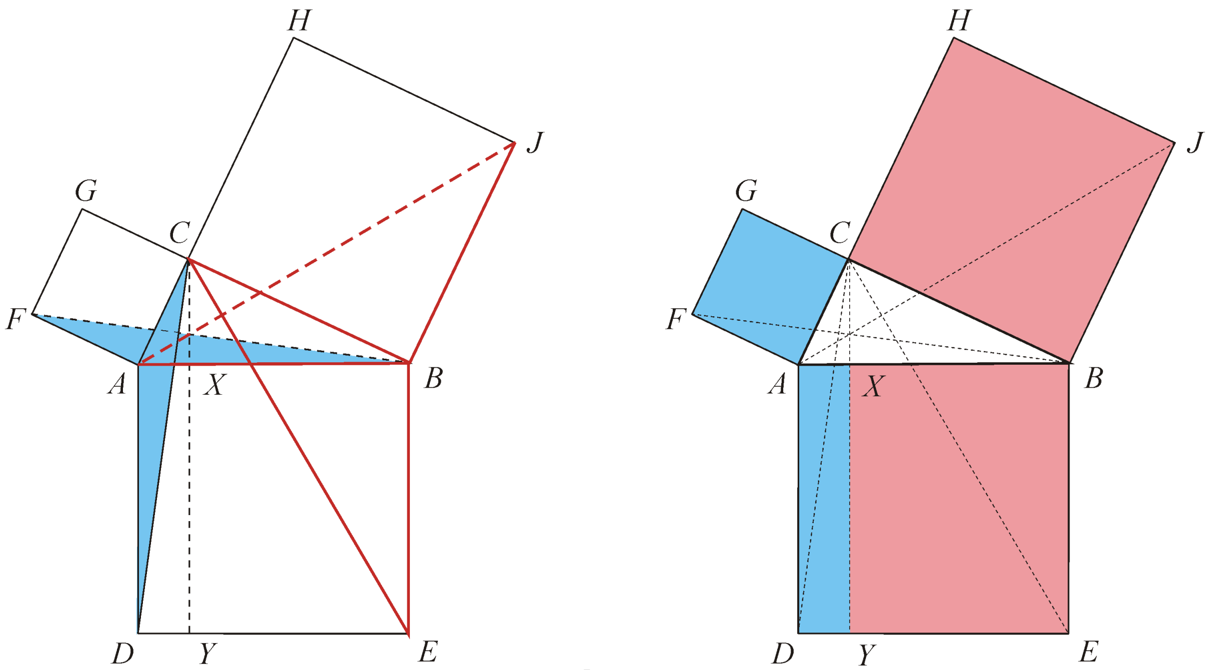
$$(m^2+1)^2 = (2m)^2 + (m^2-1)^2, \qquad \text{tj.} \qquad a = 2m,\ b = m^2-1,\ c = m^2+1,$$

kde m je libovolné přirozené číslo.

V souvislosti s Pythagorejskými trojicemi poznamenejme, že v čínském spise *Matematika v devíti knihách*, který byl sestaven snad v prvním století našeho letopočtu, avšak shrnuje poznatky z předcházejících staletí, je použito pravidlo, jehož pomocí se v pravoúhlých trojúhelnících docílí racionálních a celočíselných stran. Toto pravidlo vychází z identity:

$$\left(\frac{p^2-q^2}{2}\right)^2 + (pq)^2 = \left(\frac{p^2+q^2}{2}\right)^2.$$

Na závěr této části uveďme důkaz Pythagorovy věty, který je uveden v 1. knize Eukleidových *Základů* napsaných kolem roku 300 př. n. l.



Obr. 3.32

Uvažujme takto:

- Trojúhelníky *FAB*, *CAD* jsou shodné podle věty sus.
- Obsah trojúhelníka *FAB* je roven polovině obsahu čtverce *ACGF* (*FA* je základna a *CA* odpovídající výška trojúhelníka *FAB*).
- Obsah trojúhelníka *CAD* je roven polovině obsahu obdélníka *ADYX* (*AD* je strana a *XA* odpovídající výška trojúhelníka *CAD*).
- Obsah čtverce *ACGF* je proto roven obsahu obdélníka *ADXY* (tím jsme zároveň dokázali Eukleidovu větu o odvěsně).
- Analogicky dokážeme, že obsah čtverce *BJHD* je roven obsahu obdélníka *EBXY*.
- Součet obsahů čtverců nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka *ABC* je proto roven obsahu čtverce *ADEB* nad přeponou.