4.1 VÝVOJ POJMU FUNKCE

Cesta, která vedla k pojmu funkce v dnešním smyslu, sahá daleko do minulosti. Z dnešního pohledu bychom mohli za matematické vyjádření závislosti pokládat již mezopotámské tabulky z druhého tisíciletí před naším letopočtem, které obsahují převrácené hodnoty, druhé a třetí mocniny a odmocniny přirozených čísel aj. Podobně ve starém Řecku lze vysledovat řadu úvah, o kterých bychom dnes řekli, že vyjadřují funkční závislost; uveďme například snahu Pythagorejců o nalezení základních zákonů akustiky, která vedla k určení vztahu mezi délkou a tloušťkou struny a výškou tónu. Řečtí geometři rovněž studovali křivky vzniklé spojitým pohybem bodu, studovali jejich vlastnosti a formulovali kinematické zákony jejich vzniku. Úvahy vedoucí k pojmu funkce se dále rozvíjely ve středověku a novověku.

Středověké počátky: teorie forem

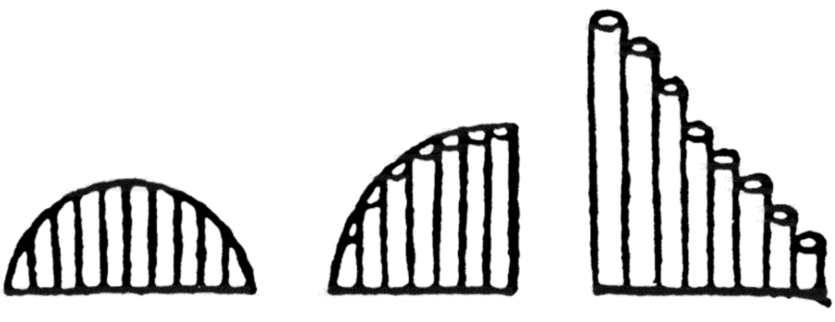
Pravzory myšlenek funkční závislosti a jejího grafického znázornění lze vysledovat ve středověké *teorii forem*. Tuto nauku začal rozvíjet **John Duns** (asi 1265 – 1308), který *formou* rozuměl jakousi smyslově vnímanou vlastnost věcí, které existují dříve než obecné pojmy. Na něj pak navázal **Thomas Bradwardine** (1290 – 1349), který se přiblížil pojmu okamžité rychlosti, a dále potom **Richard Swineshead** (1340 – 1354), jenž uvažoval tzv. *intenzitu formy* jako proměnnou intenzita množství (míra tepla nebo chladu, řídkosti nebo hustoty, rychlost mechanického pohybu aj.). Swineshead také zkoumal různé příklady (čistě abstraktní povahy) změn intenzit a hledal *střední intenzity* za různých podmínek. V jeho práci můžeme například nalézt známý vztah pro průměrnou rycholost při rovnoměrně zrychleném (zpomaleném) pohybu, který bychom v dnešní symbolice zapsali ve tvaru

$$v_p = \tfrac{1}{2}\left(v_1 + v_2\right).$$

Slovy R. Swinesheada: *při rovnoměrném růstu intenzity je střední intenzita za určitý časový interval aritmetickým průměrem počáteční a konečné intenzity*. Swineshead ale uvažoval i složitější podmínky, například situaci, kdy intenzity v po sobě jdoucích úsecích určitého intervalu (třeba hodiny), rozděleného v geometrickou posloupnost 1/2, $1/2^2$, $1/2^3$,..., rostou podle aritmetické posloupnosti 1, 2, 3, ... V tomto případě ukázal, že střední intenzita se rovná intenzitě na druhém z těchto částečných intervalů; tj. v dnešním zápisu:

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 3 + \cdots = 2\,.$$

Patrně nejzajímavějším představitelem tohoto směru byl **Mikuláš Oresme** (1323 – 1382), který začal veličiny a jejich vzájemné závislosti znázorňovat graficky: intenzitu vyjadřoval úsečkami – tzv. *šířky* (*latitudo*) *kvalit* nebo *forem*, které jsou vkládány do bodů přímky vyjadřující *extenzitu* (např. čas) – tzv. *délky* (*longitudo*). Velikosti šířek byly úměrné intenzitám, vedeny mohly být libovolným směrem, nejlépe kolmo na přímku délek:



Obr. 4.1

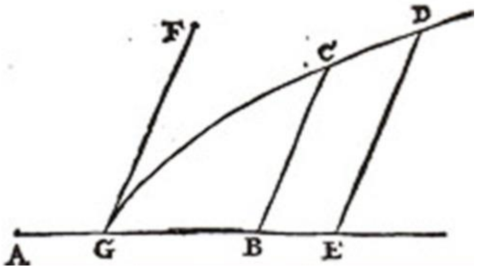
Kromě *lineárních kvalit*, jejichž intenzity leží na přímce, Oresme uvažoval i *kvality rovinné* (intenzity v dvourozměrném prostoru, znázorňují se tělesy o rovinných základnách) a *tělesné* (přiblížení k představě čtyřdimenzionálního prostoru, i když ne zcela jasné). U lineárních kvalit přitom rozlišoval následující typy:

1. *rovnoměrné s konstantní intenzitou* (v grafickém znázornění obdélník),
2. *rovnoměrně nerovnoměrné* (trojúhelník nebo čtyřúhelník se šikmou horní stranou),
3. *nerovnoměrně nerovnoměrné* – všechny ostatní:
   a) *jednoduché*: čára intenzity jednolitá a nesestává se z několika částí; čára může být „racionální“ (kružnice, elipsa) nebo „iracionální“,
   b) *složité*: vznikají kombinováním šesti předchozích.

Novověké počátky: zrod analytické geometrie

Významným krokem k dnešnímu pojetí funkce a jejímu grafickému znázornění byl zrod analytické geometrie, za jejíž zakladatele jsou obvykle považováni **Pierre de Fermat** (1607–1665) a **René Descartes** (1596–1650). Fermat se touto částí matematiky zabýval v práci *Úvod do studia rovinných a prostorových míst* z roku 1637, která však byla dlouho šířena jen v korespondenci; tiskem vyšla až posmrtně v roce 1679. Řečeno dnešními slovy, Fermat zde například používal kartézské souřadnice a odvodil rovnice přímek a kuželoseček. Lze říci, že se dostal dále než Descartes, vliv jeho práce však nebyl tak velký.

Descartes se analytickou geometrií zabýval ve spisu *Geometrie* z roku 1637. Využíval efektivní algebraickou symboliku, načrtl základní myšlenku využití souřadnic a ukázal souvislost mezi křivkami v rovině a algebraickými rovnicemi o dvou neznámých. Jeho velkou zásluhou bylo přenesení aparátu algebry do geometrie: při řešení geometrické úlohy popsal zadání délkami určitých úseček (souřadnicemi), příslušné vztahy vyjádřil algebraickými rovnicemi a řešením těchto rovnic pak získal řešení uvažované úlohy. Dnešní *kartézské souřadnice* jsou sice pojmenovány po tomto mysliteli, sám Descartes však používal souřadnice trochu odlišné: kladné souřadnice nezávisle proměnné znázorňoval na polopřímce, v druhém – ovšem libovolném – směru vynášel závisle proměnnou:



Obr. 4.2

Descartesova práce znamenala velký pokrok v chápání proměnné veličiny a funkční vzdálenosti. Závisle proměnná byla uvažována jako délka úsečky, která se rovnoběžně posouvá a její koncový bod vytváří křivku; nezávisle proměnná pak představovala vzdálenost krajního bodu této úsečky od pevně zvoleného bodu a určovala okamžitou polohu pohybující se úsečky. Descartes rovněž používal tzv. kanonický tvar rovnic $P(x)=0$; na levou stranu se přitom lze dívat jako na funkční předpis, kořeny představují průsečíky grafu funkce se základní osou. Funkci Descartes tedy chápal jako určitý analytický výraz.

Descartes měl velký vliv na další vývoj – na jeho výsledky navázali například John Wallis, Jan de Witt, Guillaume de l'Hospital, Isaac Newton, Leonhard Euler a mnozí další.

Podívejme se nyní na definici vlastního pojmu *funkce* a na historii konkrétních funkcí, které se ve školské matematice studují.[1]

Definice pojmu funkce

Podle toho, co je dnes historikům matematiky známo, se slovo *funkce* poprvé objevilo v roce 1673 v Leibnizově rukopise *Inverzní metoda tečen neboli o funkcích*. Pojem funkce je zde chápán ryze geometricky a je pevně spojen s křivkou: *funkcemi křivky* Leibniz rozuměl úseky na osách objevující se při konstrukci tečny a dalších přímek a křivek vztažených k danému bodu křivky. Poprvé bylo toto pojetí slova funkce publikováno v roce 1692.

První definici pojmu funkce v téměř současném pojetí publikoval **Johann Bernoulli** (1667 – 1748) v roce 1718:

Funkcí proměnné veličiny se nazývá veličina sestavená libovolným způsobem z této proměnné veličiny a konstant.

Přesnější definici podal v roce 1748 **Leonhard Euler** (1707 – 1783):

Funkce proměnné veličiny je analytický výraz sestavený libovolně z této proměnné veličiny a konstantních veličin.

Euler si sám uvědomoval, že toto pojetí funkce jako analytického výrazu není postačující. V roce 1755 pak uvedl širší definici:

Když některé veličiny závisejí na druhých takovým způsobem, že při změně těchto samy podléhají změně, pak první nazýváme funkcemi druhých. Tento název má mimořádně širokou povahu; zahrnuje všechny způsoby, jakými lze jednu veličinu vyjádřit pomocí jiných. Jestliže tedy x označuje proměnnou veličinu, pak všechny veličiny, které jsou na x závislé jakýmkoli způsobem nebo jsou jím určené, se nazývají jeho funkcemi.

Významným matematikem, který přispěl k rozvoji nauky o funkcích, byl **Joseph Fourier** (1768 – 1830), který narušil do té doby vžité představy o tom, že funkce musí být spojité; připouštěl však jen konečný počet bodů nespojitosti. Příklady „hodně“ nespojitých funkcí se objevily později. Připomeňme, že v roce 1829 uvedl **Peter Lejeune Dirichlet** (1805 – 1859) známý příklad funkce, která je nespojitá v každém bodě: funkční hodnotu definoval tak, že se pro racionální hodnoty proměnné rovná určité konstantě c a pro iracionální hodnoty se rovná jiné konstantě d. Dirichlet rovněž podal moderní definici pojmu funkce, v níž zdůraznil jednoznačnost funkční hodnoty i skutečnost, že není podstatné, zda existuje vzorec, který by uvedenou závislost popisoval:

y je funkce x, jestliže každé hodnotě x z daného intervalu odpovídá jediná hodnota y.

V devatenáctém století se nauka o funkcích významným způsobem rozvíjela. Kromě jiného se matematika musela vypořádat se správným zavedením a pochopením pojmů spojitosti a derivace funkce včetně poznání, že existují spojité funkce, které nemají v žádném bodě svého definičního oboru derivaci. Rozvíjelo se rovněž studium reálných a komplexních funkcí komplexní proměnné a funkcí více proměnných.

Vznik teorie množin pak umožnil definici *obecného zobrazení jedné množiny do druhé*, kterou podal v roce 1887 **Julius Wilhelm Richard Dedekind** (1831 – 1916). V definici však stále zůstává nedefinovaný výraz „přísluší“:

---

[1] Podrobnosti o historickém vývoji spolu s odkazy na další zdroje čtenář nalezne například v práci A. Kopáčkové: *Fylogeneze pojmu funkce*, in: *Matematika v proměnách věků II*, Prometheus, Praha 2001, str. 46–80, a v článku J. Šimši: *Funkce – od hodnot k distribucím*, in: *Matematika, fyzika a jejich lidé*, Prometheus, Velké Meziříčí 2002, str. 32–58.

Pod zobrazením φ nějakého systému S se rozumí pravidlo, podle něhož každému určitému prvku s systému S přísluší jedna určitá věc, která se nazývá obrazem s a označuje se pomocí $\varphi(s)$; říkáme také, že $\varphi(s)$ odpovídá prvku s, že $\varphi(s)$ vznikne nebo se vyrobí z s pomocí zobrazení φ, že s přechází na $\varphi(s)$ zobrazením φ.

Ve 20. století již bylo zobrazení chápáno jako uspořádaná trojice $\langle f, X, Y \rangle$, kde X, Y jsou neprázdné množiny (v případě funkce jsou to podmnožiny některého číselného oboru), $f \subset X \times Y$ a každý prvek $x \in X$ je prvním prvkem právě jedné uspořádané dvojice z *f*.