

4.2 GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Goniometrie a trigonometrie

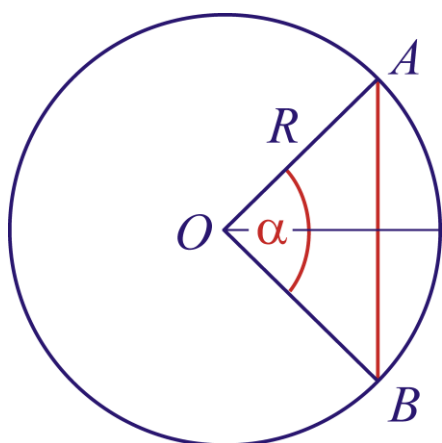
Slova goniometrie a trigonometrie jsou řeckého původu; *goniometrie* znamená v doslovném překladu měření úhlu, *trigonometrie* znamená měření trojúhelníka (určení jeho stran a úhlů ze tří daných prvků). Podstatným podnětem pro rozvoj trigonometrie byla astronomie, nezbytná mimo jiné pro mořeplavectví, které vyžadovalo správné určování kurzu lodí na širém moři podle polohy nebeských těles. Stejně tak byl rozvoj rovinné i sférické trigonometrie podněcován potřebami sestavit přesné zeměpisné mapy, určit vzdálenosti na zemském povrchu, určit správnou orientaci budov (například mešit, které musí vždy směřovat směrem k Mekce).

Antika

Určité zárodky trigonometrických znalostí lze vystopovat již ve starověkém Egyptě, kde byly při stavbě pyramid a vyměřování pozemků používány věty o poměrech stran v podobných trojúhelnících. Ve starověké Mezopotámii se určité trigonometrické úvahy rozvíjely v souvislosti s astronomií; hledaly se zde délky tětiv. Od mezopotámských astronomů převzali jejich poznatky staří Řekové, jak o tom svědčí mimo jiné i dělení kruhu na 360 dílů.

Za zakladatele trigonometrie je obvykle považován **Hipparchos** (2. stol. př. n. l.), který podle komentářů pozdějších autorů napsal 12 knih o počítání tětiv a sestavil tabulky udávající délky tětiv příslušejících různým středovým úhlům v kružnici o daném poloměru. V dnešní terminologii se jednalo o tabulky dvojnásobků sinů polovin středových úhlů (viz následující obrázek).

Kolem roku 100 n. l. napsal rozsáhlé dílo o počítání s tětivami Menelaos z Alexandrie; z tohoto díla se dochovala jen část věnovaná sférické trigonometrii.



Obr. 4.3

V dnešním značení:

$$\frac{1}{2} |AB| = R \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

pro délku tětivy AB tedy platí:

$$|AB| = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Zvolíme-li $R = 1$, bude

$$|AB| = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

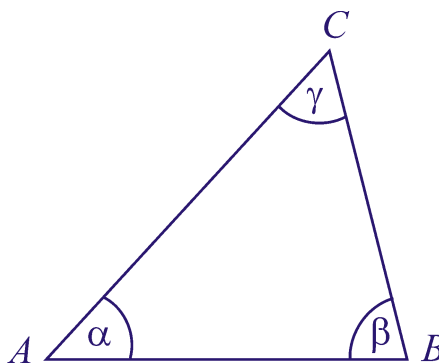
Hipparchovo a Menelaovo dílo završil Claudius Ptolemaios (2. stol. n. l.), který napsal spis *Megalé syntaxis* (*Velká skladba*, arabsky *Almagest*), kde popsal svou geocentrickou soustavu a systematicky vložil trigonometrii tětiv.

Ptolemaios vyšel z věty, která je dnes po něm pojmenovaná (i když ji znal již Hipparchos): *Obsah obdélníka, sestrojeného z úhlopříček čtyřúhelníka vepsaného do kružnice, se rovná součtu obsahů obdélníků sestrojených z protilehlých stran tohoto čtyřúhelníka.* Díky této větě pak vypočítal ze známých tětiv dvou úhlů tětivu součtu,

polovičního rozdílu a dvojnásobku těchto úhlů. Ptolemaios rovněž dokázal, že pro libovolný trojúhelník ABC platí sinová věta, kterou dnes zapisujeme ve tvaru:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

(Ptolemaios ovšem nehovořil o sinech, ale o tětivách).



Obr. 4.4

Ptolemaios dělil kruh na 360 a průměr na 120 shodných dílů a vyjadřoval jejich zlomky v šedesátkové soustavě. Při výpočtu tětiv postupoval tak, že do kružnice vepisoval pravidelné mnohoúhelníky se 3, 4, 5, 6 a 10 stranami. To mu umožnilo vypočítat délky tětiv odpovídajících středovým úhlům o velikostech 120° , 90° , 72° , 60° a 36° . Díky metodě určení tětivy odpovídající polovičnímu středovému úhlu a s využitím interpolace pak Ptolemaios s mimořádnou přesností počítal délky tětiv odpovídajících úhlům od $0,5^\circ$ do 180° s krokem $0,5^\circ$, což odpovídá sinům od $0,25^\circ$ do 90° s krokem $0,25^\circ$.

Dodejme, že Menelaos, Hipparchos a Ptolemaios se soustředili především na sférickou trigonometrii, která měla zásadní význam v astronomii. Trigonometrii rovinnou rozvíjeli spíše jako pomocnou vědu pro výpočty tabulek tětiv a k dokazování vět sférické trigonometrie.

Středověká Asie

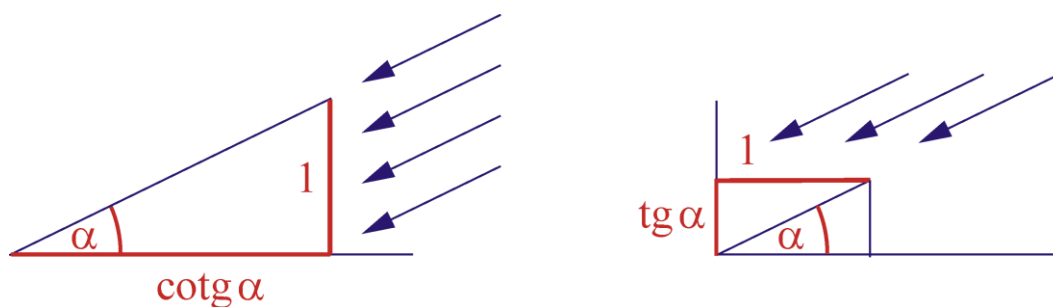
V době od 5. do 12. století byla trigonometrie rozvíjena především v Indii. Při výpočtech zde začala být užívána polovina tětivy odpovídající středovému úhlu, tedy – budeme-li uvažovat jednotkový poloměr – sinus v dnešním smyslu. Indové rovněž zavedli funkci kosinus a znali vzorce

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Stejně tak používali vzorce pro funkce součtu a rozdílu dvou úhlů.

Nejstarší indický spis obsahující trigonometrii funkce sinus pochází od Aryabhaty a byl sepsán kolem roku 500 n. l.; jedná se zároveň o nejstarší dochovaný indický astronomický spis vůbec. Mimořádné přesnosti dosáhl Bhaskara ve 12. století (například pro sinus $3^\circ 45'$ našel hodnoty sinu a kosinu lišící se od přesných hodnot o 0,000 000 01 poloměru).

Dále se trigonometrie rozvíjela ve střední Asii. Syrský astronom Albattani (zemřel roku 929 n. l.) zavedl na základě pozorování výšky slunce pomocí vertikální tyče a jejího stínu funkci, kterou dnes označujeme – pro tyč jednotkové délky – jako kotangens, a sestavil tabulku obsahující hodnoty této funkce pro úhly rostoucí po 1° . Astronom Abu Lvafa sestavil v 10. století tabulku hodnot funkce tangens jako délku stínu vrženého horizontální tyčí dané délky na vertikální stěnu. Asijští vědci označovali funkce *kotangens* a *tangens* jako *přímý stín* a *obrácený stín*, latinsky *umbra recta* a *umbra versa*; latinské názvy *tangens* a *kotangens* se objevily v Evropě až v 16. a 17. století.



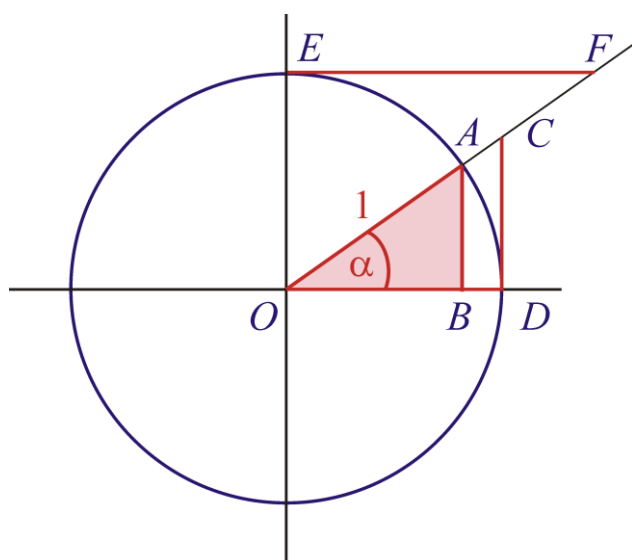
Obr. 4.5

Evropa

Z evropských matematiků je třeba zmínit Johanna Müllera z Königsbergu u Hassfurtu (1436 až 1476), nazývaného podle latinského názvu jeho rodiště *Regiomontanus*. Jeho spis *O trojúhelnících všelikých knih patero* (sepsán v letech 1462–1464, publikován 1533) představuje první evropskou práci, kde byla trigonometrie chápána široce jako samostatná matematická disciplína. Regiomontanus převzal velkou část výsledků z arabské literatury, zasloužil se však o výborný výklad doplněný řadou vlastních dílčích výsledků a originálních důkazů. Podstatné je, že vyložil trigonometrii jako samostatnou vědu, nezávislou na astronomii. Zavedl také funkci tangens, která byla do té doby v Evropě neznámá. Při výpočtech Regiomontanus uvažoval poloměr kružnice 10 000, resp. 10 000 000; goniometrické funkce tedy vyjadřoval v desetinných zlomcích a upustil od výpočtů v šedesátkové soustavě.

Další pokrok ve vývoji trigonometrie představuje spis *O pohybech těles nebeských*, který napsal slavný polský hvězdář Mikuláš Koperník (1473–1543).

Zatím byly goniometrické funkce zaváděny na základě kružnice, jejíž poloměr se nazýval *sinus totus* (úplný sinus; největší hodnota, jíž sinus pro daný poloměr nabýval). Koperníkův žák Georg Joachim Rhaeticus (1514–1574) vyšel při definici goniometrických funkcí z pravouhlého trojúhelníka, jehož přepona byla poloměrem kružnice, na níž se měřily příslušné oblouky. Sestavil sedmimístné tabulky funkcí sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans, kosekans, sinus totus a sinus versus. Připomeňme, že pro pravouhlý trojúhelník s jednotkovou přeponou lze uvedené funkce znázornit následujícím způsobem:



$$\text{sinus totus } \alpha = 1 = \sin 90^\circ = |OA|$$

$$\text{sinus versus } \alpha = 1 - \cos \alpha = |BD|$$

$$\sin \alpha = |AB|, \quad \cos \alpha = |OB|$$

$$\text{tg } \alpha = |CD|, \quad \text{cotg } \alpha = |EF|$$

$$\sec \alpha = |OC|, \quad \text{cosec } \alpha = |OF|$$

Obr. 4.6

Jednotkový poloměr však důsledně zavedl teprve Leonhard Euler (1707–1783), který dal trigonometrii její nynější podobu. Ve svém spise *Úvod do analýsy* z roku 1748 vybudoval

trigonometrii jako vědu o goniometrických funkcích, zavedl vhodnou symboliku (strany trojúhelníka označil malými písmeny latinské abecedy, jim protilehlé úhly označil odpovídajícími písmeny velké abecedy, což umožnilo výhodnou cyklickou záměnu), goniometrické funkce označil zkratkami $\sin Z$, $\tan Z$, $\cos Z$ aj. Celý souhrn goniometrických vzorců Euler odvodil z několika základních vztahů. Nalezl rovněž souvislost goniometrických funkcí s imaginární jednotkou:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

a díky tomu ukázal krásný a překvapivý vztah mezi konstantami e , i , π , které spolu na první pohled nemají nic společného:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Triangulace a rozměry Země

Dodejme, že trigonometrie zásadním způsobem přispěla – kromě astronomie – také k poznání skutečných rozměrů Země. V roce 1614 provedl Willebrord Snellius (1581–1626) měření části poledníku pomocí triangulace, tedy způsobem, který se používá i dnes. Vyšel ze základny o délce 87 rýnských prutů (asi 326 m) a vhodným skládáním trojúhelníků dospěl k určení vzdálenosti mezi dvěma body téhož poledníku. Odtud vypočítal délku zemského kvadrantu, která by v přepočtu na dnešní jednotky činila 10 004 km.

Ke konci 17. století bylo provedeno významné měření části zemského poledníku mezi Dunquerkem a Barcelonou, jehož se zúčastnila řada francouzských vědců, například astronom Pierre François André Méchain a Jean Baptiste Delambre. Z výsledků měření byla vypočtena délka části zemského poledníku se středovým úhlem 1° a délka čtvrtiny poledníku. Tyto hodnoty byly určeny v tehdy používané francouzské délkové míře tois (1 949m). Desetimiliontina čtvrtiny poledníku byla nazvána *metr* (mètre) a zavedena jako zákonná jednotka délkové míry ve Francii a později i ve většině ostatních civilizovaných zemí.