4.3 LOGARITMY A EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Dnes se ve školské matematice nejprve zavádí exponenciální funkce a následně pak funkce logaritmická, která pro dané číslo udává exponent, na který se musí umocnit daný základ, aby vzniklo toto číslo. Pro žáky i učitele může být překvapivé, že historický vývoj byl zcela odlišný; mimo jiné i proto, že v době, kdy byly logaritmy do matematiky zavedeny, nebyla ještě vytvořena vhodná symbolika.

LOGARITMY

Michael Stifel – srovnání aritmetické a geometrické posloupnosti

Archimedes (asi 287 – 212 př. n. l.) jako jeden z prvních prvních vědců vedle sebe postavil geometrickou a aritmetickou posloupnost a povšiml si, že násobení v jedné posloupnosti odpovídá sčítání v druhé. Tato skutečnost však, jak se zdá, byla považována spíše za zajímavou než užitečnou.

Michael Stifel (1487 – 1567) tuto skutečnost pojmenoval zřetelněji. Ve své práci *Aritmetica integra* z roku 1544 studoval následující dvojici posloupností:

...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
...	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...

Stifel pak jasně vyjádřil to, čemu dnes říkáme *logaritmický princip*:

Sečítání v řadě aritmetické odpovídá násobení v řadě geometrické, právě tak odčítání v oné odpovídá dělení v této. Jednoduché násobení v aritmetických řadách stává se násobením sama sebe (umocňováním) v řadě geometrické. Dělení v řadě aritmetické je přiřazeno odmocňování v řadě geometrické jako třeba půlení druhé odmocnině.

Obecně můžeme samozřejmě uvažovat jakoukoli dvojici posloupností tvaru:

...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
...	q^{-5}	q^{-4}	q^{-3}	q^{-2}	q^{-1}	q^0	q^1	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8	q^9	...

Druhý řádek obsahuje vždy mocninu čísla q na exponent uvedený v prvním řádku nad ním. Protože při násobení, resp. dělení dvou čísel o stejném základu se sčítají, resp. odčítají jejich exponenty, je jasné, že násobení čísel v druhém řádku odpovídá součtu příslušných čísel v prvním řádku a dělení čísel v druhém řádku odpovídá rozdílu příslušných čísel v prvním řádku, například:

$$q^2 \cdot q^5 = q^{2+5} = q^7, \qquad q^9 \cdot q^5 = q^{9-5} = q^4.$$

Podobně umocňování, resp. odmocňování čísel v druhém řádku odpovídá násobení, resp. dělení příslušných čísel v prvním řádku, například:

$$\left(q^2\right)^3 = q^{2\cdot 3} = q^6, \qquad \sqrt[3]{q^9} = q^{9:3} = q^3.$$

Početní operace sčítání a odčítání jsou podstatně jednodušší než násobení a dělení, stejně tak násobení a dělení jsou jednodušší než umocňování a odmocňování; tabulka tedy může být velmi užitečná pro provádění složitějších výpočtů.

Jost Bürgi

Jost Bürgi (1552 – 1632) publikoval v roce 1620 tabulky logaritmů sestavené pravděpodobně již o mnoho let dříve. U Stifelovy tabulky se Bürgi mohl povšimnout, že v druhém řádku narůstají mezery mezi čísly a nelze například vynásobit $25 \cdot 37$. Uvědomil si, logaritmická vlastnost se vztahuje na řady s libovolným kvocientem, a že mají-li mít posloupnosti skutečně praktické využití, je třeba, aby členy geometrické posloupnosti byly pokud možno „blízko“ u sebe, čehož dosáhl tím, že kvocient zvolil velmi blízký jedné: $q = 1{,}0001$; jako první člen pak uvažoval $a_0 = 100\ 000\ 000$. Diferenci aritmetické posloupnosti, jejíž členy nazýval *červenými čísly*, zvolil rovnu 10, a sestavil následující tabulku seřazenou nikoli podle čísel, která se mají násobit, ale podle logaritmů:

		0	500	1000	
	0	100 000 000	100 501 227	101 004 966	
červená	10	100 010 000	100 511 277	101 015 067	↵ $\cdot 1{,}0001$
čísla	20	100 020 001	100 521 328	101 025 468	
~ logaritmy	30	100 030 003	100 531 380	101 035 271	
	40	100 040 004	100 541 433	101 045 374	
	...	...	...	...	

Bürgi neznal základ logaritmu v našem smyslu, pokud bychom jej však z jeho tabulky vypočítali, vyšel by roven 2,7184593, což se od hodnoty čísla *e* liší teprve na čtvrtém desetinném místě; jedná se však spíše o náhodu, neboť číslo *e* v té době ještě nebylo zavedeno a známo.

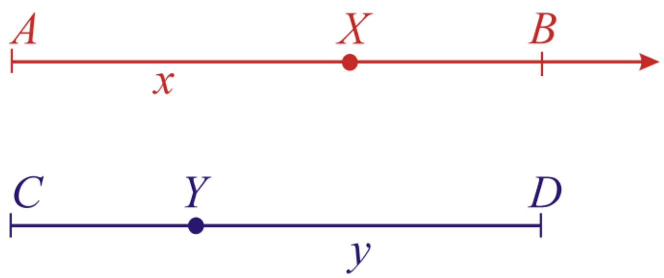
John Napier

Za vynálezce logaritmů je dnes zpravidla považován John Napier (1550 – 1617), který práci o logaritmech publikoval nakonec dříve než Bürgi, a to v roce 1614; přísluší mu rovněž zásluha na zavedení slova *logaritmus*. Napier odvodil tabulky logaritmů sinů s krokem po jedné minutě. Proto lze usuzovat, že motivací pro zavedení logaritmů mu mohly být vzorce

$$\sin\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \quad \text{či} \quad \sin\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \ ,$$

které v sobě ukrývají jádro, v němž spočívá síla logaritmů: převedení součinu na součet (popř. rozdíl).

Napier zavedl logaritmy následujícím způsobem. Uvažujme dva body, z nichž jeden se pohybuje rovnoměrnou rychlostí po polopřímce *AB* a druhý se pohybuje po úsečce *TS* rovnoměrně zpomaleně tak, že v každém bodě je jeho okamžitá rychlost rovna vzdálenosti zbývající do bodu *D*:



Obr. 4.7

Napier zvolil $|CD| = 10^7$ a získal tabulku obsahující pro jednotlivé časové okamžiky aritmetickou posloupnost tvořenou vzdálenostmi $x = |AX|$ a geometrickou posloupnost tvořenou vzdálenostmi $y = |YD|$:

čas n	$x = n \cdot 1{,}000\ 000\ 05$	$y = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$
0	0	10 000 000
1	1,000 000 05	9 999 999
2	2,000 000 10	9 999 998
3	3,000 000 15	9 999 997
...	...	...

Vzdálenost x pak definuje *Napierův logaritmus* vzdálenosti y,

$$x = \mathrm{Nap}\log y \,.$$

Z dnešního pohledu odpovídá Napierův logaritmus vztahu

$$\mathrm{Nap}\log y = 10^7 \cdot \log_{1/e}\left(y / 10^7\right).$$

Napierovy tabulky vyvolaly značný zájem. V roce 1915 navštívil Napiera Henry Briggs (1561 – 1631). Během této návštěvy se Napier s Briggsem domluvili, že tabulky budou užitečnější, změní-li se tak, že logaritmus jedné bude roven nule a logaritmus deseti bude roven jedné; tak byl zaveden *dekadický logaritmus*. Briggs následně vypracoval rozsáhlé 14-místné tabulky logaritmů.

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

V roce 1683 Jacob Bernoulli (1654 – 1705) studoval problém složeného úročení a při té příležitosti se snažil najít limitu výrazu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, o níž dokázal, že leží mezi hodnotami 2 a 3; tento odhad lze považovat za první aproximaci čísla e.

Označení e pak zavedl Leonhard Euler (1707 – 1785), jemuž v této oblasti přísluší řada dalších zásluh: jako první definoval logaritmus jako exponent:

$$\log_a x \ \textit{je exponent } y\textit{, pro který platí: } a^y = x \,.$$

Euler dále ukázal, že platí:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots, \qquad e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n,$$

a vypočítal e s přesností na 18 desetinných míst:

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235 \,.$$